Легко заметить, что партии игр (Γ_1, f_1, f_2) и (Γ_2, f_1, f_2) совершаются игроком (2), а игр (Γ_3, f_1, f_2) и (Γ_4, f_1, f_2) — игроком (1). В зависимости от расположения начальной позиции $x_0^{(j)}$ $(j=1,2,4)$ это может быть не так только на первом ходу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берж К., Общая теория игр нескольких лиц, М., 1961.
2. Wolfe P., In: Mathematical Optimization Techniques, California, 1963.
3. Pietrzykowski T., Zakl. Apar. Matem. PAN, Prace A, Warczawa, № 13 (1961).
4. Зойтендейк Г., Методы возможных направлений, М., 1963.
5. Демьянов В. Ф., Кибернетика, № 6 (1965).
6. Fiacco A. V., McCormick G. P., Manag. Sci., № 2 (1964).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
27/X 1970

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20 KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.2.19

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН

ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТКА НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

M. LEVIN. PARIMATE KVADRATUURVALEMITE VEA HINNANGUST

M. LEVIN. ON ESTIMATING THE ERROR FOR THE BEST QUADRATURE FORMULAE

Наилучшие квадратурные формулы (в смысле [1]) строятся путем минимизации остатка для «наихудших» функций рассматриваемого класса. Интересно рассмотреть, как ведет себя остаток наилучшей в данном классе квадратурной формулы для «хороших» функций из этого класса.

При решении этого вопроса мы будем пользоваться результатами и обозначениями работы [2], а также приемом, который использовался П. Дейвисом для остатка формул интегрирования [3].

Объектом рассмотрения является наилучшая квадратурная формула вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{2r-2} \mu_k^{(j)} f^{(j)}(x_k) + R_n(f) \tag{1}$$

в классе $W_{01L}^{(2r)}$ $(1 < q \leqslant \infty)$ функций $f(x)$, которые на отрезке [0, 1] имеют абсолютно непрерывную производную порядка $2r-1$ и удовлетворяют условиям

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0 \quad (k=0,1,\ldots,r-1),$$

$$\left\{\int_0^1 |f^{(2r)}(t)|^q\,dt\right\}^{1/q}\leqslant M. \tag{2}$$

Пусть функция $f(x)\in W^{(2r)}_{01L_q}$ и $f(z)$ — аналитическая функция в замкнутом круге $|z|\leqslant R$, где $R>1$. Для этой функции найдем оценку ошибки названной формулы.

Из того, что

$$R_n(f)=\frac{1}{(2r)!}\int_0^1 f^{(2r)}(t)K(t)\,dt$$

и

$$f^{(2r)}(t)=\frac{(2r)!}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-t)^{2r+1}}\,dz,$$

мы имеем равенство

$$R_n(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\int\limits_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{2r+1}}K(t)\sum_{k=0}^{\infty}C^k_{2r+k}\frac{t^k}{z^k}\,dz\,dt. \tag{3}$$

Введем обозначение

$$\alpha_k=\int_0^1 t^kK(t)\,dt \quad (k=0,1,\ldots). \tag{4}$$

Если здесь применить неравенство Гёльдера, то мы получим неравенства

$$|\alpha_k|\leqslant\frac{R_{2r,p}(1)}{\sqrt[p]{2rp+1}\,\sqrt[q]{kq+1}}h^{2r} \quad (k=0,1,\ldots). \tag{5}$$

Взяв в (3) $z=Re^{i\varphi}$ и учитывая (4), получим

$$R_n(f)=\frac{1}{2\pi R^{2r}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C^k_{2r+k}}{R^k}\alpha_k\int_0^{2\pi}f(Re^{i\varphi})e^{-i\varphi(2r+k)}\,d\varphi. \tag{6}$$

Пусть теперь

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant Q. \tag{7}$$

Тогда по (6) и (5) мы имеем искомую оценку

$$|R_n(f)|\leqslant\left(\frac{h}{R}\right)^{2r}\sigma Q, \tag{8}$$

где

$$\sigma=\frac{R_{2r,p}(1)}{\sqrt[p]{2rp+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C^k_{2r+k}}{\sqrt[q]{kq+1}\cdot R^k}<\frac{R_{2r,p}(1)}{\sqrt[p]{2rp+1}\left(1-\frac{1}{R}\right)^{2r+1}}.$$

Таким образом, доказан следующий факт.

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in W^{(2r)}_{01L_q}$ $(1 < q \leqslant \infty)$ *и* $f(z)$ *аналитична в круге* $|z| \leqslant R > 1$ *и удовлетворяет условию* (7). *Тогда для формулы вида* (1), *наилучшей в классе* $W^{(2r)}_{01L_q}$, *и функции* $f(x)$ *справедлива оценка* (8).

Теперь рассмотрим наилучшую формулу вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{2r-2} \mu_k^{(j)} f^{(j)}(x_k) + \sum_{j=0}^{r-1} [\gamma_j f^{(j)}(0) + \delta_j f^{(j)}(1)] + R_n(f) \qquad (9)$$

в классе $W^{(2r)}_{L}$ $(1 < q \leqslant \infty)$ функций $f(x)$, которые на отрезке $[0, 1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $2r - 1$ и удовлетворяют условию (2). Учитывая, что эта формула точна для многочленов степени $2r - 1$, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in W^{(2r)}_{L_q}$ $(1 < q \leqslant \infty)$ *и* $f(z)$ *аналитична в круге* $|z| \leqslant R > 1$ *и удовлетворяет условию* (7). *Тогда для формулы вида* (9), *наилучшей в классе* $W^{(2r)}_{L_q}$, *и функции* $f(x)$ *справедлива оценка* (8).

Отметим, что значения h и $R_{2r,p}(1)$, входящие в (8), определены в рабсте [2]; $pq = p + q$.

Замечание. Пусть $f(t) \in W^{(2r)}_{01L_q}$, $f(z)$ — аналитическая функция в круге $|z - 0{,}5| \leqslant R > 0{,}5$ и в этом круге $|f(z)| \leqslant T$. Тогда $|f^{(2r)}(t)| \leqslant (2r)!\ T \cdot [R - |t - 0{,}5|]^{-2r}$ и поэтому, применяя неравенство Гёльдера к величине $R_n(f)$, получаем

$$|R_n(f)| \leqslant T \cdot \frac{R_{2r,p}(1)}{\sqrt[p]{2rp+1}} \sqrt[q]{\frac{2}{2qr-1}\left[\frac{1}{(R-0{,}5)^{2rq-1}} - \frac{1}{R^{2rq-1}}\right]} \cdot h^{2r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 19, 407 (1970).
3. Davis P., J. Rational Mech. and Analysis, 2, 303 (1953).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
18/XI 1970