EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.2.17

УДК 519.24

Э. ЛЕЛУМЕЭС

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

E. LELUMEES. ÜHEST SPEKTRAALTIHEDUSE HINNANGUST

E. LELUMEES. ON AN ESTIMATE OF THE SPECTRAL DENSITY

Известен целый ряд состоятельных оценок спектральной плотности, определения которых можно найти, например, в работах [1–8]. В настоящей заметке предлагается еще одна оценка.

Из оценок спектральной плотности $f_T^*(\omega)$, определяемой в общем виде выражением

$$f_T^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-i\tau\omega} h(\tau) R_T(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

где $R_T(\tau)$ — выборочная корреляционная функция и $h(\tau)$ — некоторая весовая функция, чаще всего в практических вычислениях применяются оценки алгебраического типа [1, 2]. В таблице можно найти весовые функции оценок Бартлетта (1; 2), Тьюки (3; 3а; 3б) и Парзена (4; 5;

Статистики для оценок спектральной плотности алгебраического типа

№	Весовая функция	q	$G(h)$	$G_1(h)$
1	$1, \quad \lvert u\rvert \leqslant 1$ $0, \quad \lvert u\rvert > 1$	Произвольная	2	6,28
2	$1-\lvert u\rvert, \quad \lvert u\rvert \leqslant 1$ $0, \quad \lvert u\rvert > 1$	1	0,67	4,19
3	$1-2a+2a\cos \pi u, \quad \lvert u\rvert \leqslant 1$ $0, \quad \lvert u\rvert > 1$	2	$2(1-4a+6a^2)$	$2\pi \dfrac{1-4a+6a^2}{1-2a}$
3а	$\frac{1}{2}(1+\cos \pi u), \quad \lvert u\rvert \leqslant 1$ $0, \quad \lvert u\rvert > 1$	2	0,75	4,71
3б	$0{,}54+0{,}46\cos \pi u, \quad \lvert u\rvert \leqslant 1$ $0, \quad \lvert u\rvert > 1$	2	0,79	4,62
4	$1-\lvert u\rvert^p, \quad \lvert u\rvert \leqslant 1$ $0, \quad \lvert u\rvert > 1$	p	$\dfrac{4p^2}{(p+1)(2p+1)}$	$\dfrac{4\pi p}{2p+1}$
5	$1-u^2, \quad \lvert u\rvert \leqslant 1$ $0, \quad \lvert u\rvert > 1$	2	1,07	5,03
6	$1-6u^2+6\lvert u\rvert^3, \quad \lvert u\rvert \leqslant \frac{1}{2}$ $2(1-\lvert u\rvert)^3, \quad \frac{1}{2} \leqslant \lvert u\rvert \leqslant 1$ $0, \quad \lvert u\rvert > 1$	2	0,54	4,52
7	Задается формулой (3)	2	0,35	4,25

6), т. е. наиболее известных из оценок алгебраического типа. Из них только оценки 2 и 6 являются неотрицательными [1]. Неотрицательность оценки — очень важное свойство, так как истинная спектральная плотность всегда неотрицательная функция и поэтому естественно оценить ее тоже неотрицательной функцией. Спектральные окна [1], соответствующие весовым функциям 2 и 6, можно записать одним выражением

$$H(\omega)=\frac{K}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2^n}}{\frac{\omega}{2^n}}\right)^{2^n}. \tag{2}$$

где K — некоторая константа. Спектральное окно $H_2(\omega)$ получаем при $n=1$ и $K={}^1/_2$, а спектральное окно $H_6(\omega)$ при $n=2$ и $K={}^3/_8$.

Рассмотрим случай когда $n=3$. Константу К определим так, чтобы соответствующая оценка спектральной плотности вида (1) была состоятельной оценкой. Для этого функция $H(\omega)$ должна удовлетворять ряду условий (см. [1], с. 175). Эти условия удовлетворены при $K=\frac{315}{1208}$.

Соответствующая весовая функция имеет вид

$$h_7(u)=\begin{cases}1-\frac{560}{151}u^2(3-16u^2+64u^4-64|u|^5), & 0\leqslant|u|\leqslant\frac{1}{4}\\ \frac{1}{302}(309-196|u|-1008u^2-15\,680|u|^3+ & \\ +80\,640u^4-150\,528|u|^5+129\,024u^6-43\,008|u|^7), & \frac{1}{4}\leqslant|u|\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{1}{302}(-139-6076|u|-38\,640u^2+109\,760|u|^3- & \\ -170\,240u^4+150\,528|u|^5-71\,680u^6+14\,336|u|^7), & \frac{1}{2}\leqslant|u|\leqslant\frac{3}{4}\\ \frac{1024}{151}(1-|u|)^7, & \frac{3}{4}\leqslant|u|\leqslant1\\ 0, & |u|\geqslant1.\end{cases} \tag{3}$$

Можно идти дальше, принимая $n=4$, но ввиду сложности аналитического вида соответствующей весовой функции, этот случай здесь не рассматривается.

В таблице приведен еще ряд статистик для рассматриваемых весовых функций, пропуская их подробное определение, которое можно найти в статьях Е. Парзена [1, 2]. Отметим только, что 1) чем больше характеристический экспонент q оценки, тем больше порядок состоятельности оценки; 2) дисперсия оценки $f_T^*(\omega)$ пропорциональна величине $G(h)$ (при нормальности процесса); 3) дисперсия оценки $f_T^*(\omega)$ при фиксированной ширине полосы пропускания спектра пропорциональна величине $G_1(h)$.

Из таблицы видно, что эти статистики лучше у оценки с весовой функцией $h_7(u)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Parzen E., Technometrics, 3, 167 (1961).
2. Parzen E., J. Roy. Stat. Soc. B, 20, 303 (1958).
3. Parzen E., Time Series Analysis Papers, Holden-Day, 1967.

4. Jenkins G. M., Appl. Statistics, 14, 2 (1965).
5. Jenkins G. M., Technometrics, 3, 133 (1961).
6. Lomnicki Z. A., Zaremba S. K., J. Roy. Stat. Soc. B, 19, 13 (1957).
7. Priestley M. B., Technometrics, 4, 551 (1962).
8. Blackman R. B., Tukey J. W., Bell System Techn. J., 37, 185, 485 (1958).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
30/X 1970

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

УДК 518.9

ИНГРИД МАУЭР

ОБ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

INGRID MAUER. TÄIELIKU INFORMATSIOONIGA KAHEISIKUMÄNGUST

INGRID MAUER. ON TWO-PERSON GAME WITH PERFECT INFORMATION

Используя обозначения и определения [1], изложим попытку рассмотрения партии некоторых игр двух лиц с полной информацией как разрешение задачи математического программирования (задача (*)) при помощи выбранных известных методов [2–6].

Задача (*): Найти M

$$M = \{x \mid \min_{x \in X_1} f(x)\}, \quad \text{где } X_1 = \{x \mid g_k(x) \leqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, m)\}.$$

Предположим, что x — точка евклидового пространства E^n и функции $f(x)$, $g_k(x)$ $(k = 1, \ldots, m)$ удовлетворяют условиям, достаточным для $M = \hat{x}$ и разрешимости задачи (*) отмеченными методами.

Опишем эти игры (Γ_j, f_1, f_2).

Рассмотрим разбиение (X_1, X_2), где X_2 — дополнение к X_1 в E^n, и двух игроков (1) и (2) с функциями предпочтения $f_1(x) = f(x)$ и

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{m} g_k(x)^+, \quad \text{где } g_k(x)^+ = \max(0, g_k(x)).$$

Игрок $(l) \in N^+$ $(l = 1, 2)$ стремится получить в течение партий возможно более предпочтительные позиции в смысле отношения $\underset{<}{l}$, причем значение $f_l(x)$ ограничено снизу числом $\inf_{x \in X_l} f_l(x)$. Так как предположим $\inf_{x \in X_1} f_1(x)$ неизвестным $(\inf_{x \in X_2} f_2(x) = 0)$, то, чтобы изложить игры без отклонения от приведенного в [1] определения игры с полной информацией, считаем включенным в правила этих игр требование, по которому среди всех полученных в партиях позиций $\{x_i^{(j)}\}$ соответ-