EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.2.15

УДК 519.4 : 519.48

Я. ЛЫХМУС

ПРОСТЕЙШИЕ СЖАТИЯ НЕАССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

J. LÕHMUS. MITTEASSOTSIATIIVSETE ALGEBRATE LIHTSAIMAD KONTRAKTSIOONID

J. LÕHMUS. THE SIMPLEST CONTRACTIONS OF NONASSOCIATIVE ALGEBRAS

1. Предельные переходы [1–5] в многообразии алгебр Ли заданной размерности n в настоящее время довольно хорошо изучены, хотя для них еще не существует законченной общей теории вроде теории деформаций алгебр Ли [6, 7] (где в терминах алгебраической топологии удалось описать всевозможные нетривиальные деформации [7]).

В настоящей заметке исследуется простейший вариант (типа Иненю-Вигнера [2]) предложенного в [8] обобщения понятия предельного перехода на общие (неассоциативные нелиевы) линейные алгебры, базисные элементы которых имеют инфинитезимальный характер, т. е. для них имеют смысл пределы $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon e_i = \tilde{e}_i$, где e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть базисные элементы линейной алгебры. Примером таких алгебр служит целый класс так наз. бинарно-лиевых алгебр [9].

Пусть задана общая неассоциативная линейная алгебра A с базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, тогда умножение любых элементов определяется соотношением

$$e_i e_j = c_{ij}^{k} e_k, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где c_{ij}^{k} — структурные константы алгебры A.

Для исследования предельного перехода важно рассматривать также ассоциаторы $(e_i, e_j, e_k) = (e_i e_j) e_k - e_i (e_j e_k)$ базисных элементов:

$$(e_i, e_j, e_k) = c_{ijk}^{l} e_l, \quad c_{ijk}^{l} = c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} - c_{jk}^{m} c_{im}^{l}. \tag{2}$$

2. Рассмотрим сжатие (предельный переход) относительно некоторого «стабильного» подмножества $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$ базисных элементов, т. е. случай, когда сжатию (умножению на устремляющийся к нулю предельный параметр) подвергается остальная часть $\{e_{s+1}, \ldots, e_n\}$, которую можно назвать дополнением стабильного подмножества. Аналогично случаю алгебр Ли введем ε-преобразование [5] этого дополнения

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i(\varepsilon) &= e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \\ \tilde{e}_j(\varepsilon) &= \varepsilon e_j, \quad j = s+1, s+2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3}$$

Подробный разбор возможных комбинаций индексов новых структурных констант $\tilde{c}_{ij}^{k}$ (структурных констант предельной, сжатой алгебры) и величин $\tilde{c}_{ijk}^{l}$ с учетом формул (3) ведет к следующей теореме, являющейся обобщением основной теоремы в [2] на общие линейные алгебры.

Теорема. *Для произвольной линейной алгебры A с заданным конкретным базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ разложение базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\} + \{e_{s+1}, \ldots, e_n\}$ и последующее ε-преобразование* (3) *ведут при $\varepsilon \to 0$ к вполне определенной предельной (сжатой) алгебре $\hat{A}$ тогда и только тогда, когда исходная алгебра A удовлетворяет следующим требованиям:*

а) *подмножество $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$ образует базис некоторой подалгебры (относительно основной операции) и*

б) *эта подалгебра замкнута также относительно тернарной операции образования ассоциатора.*

При этом новые структурные константы $\tilde{c}_{ij}^{k}$ выражаются соотношениями

$$\tilde{c}_{ij}^{k} = c_{ij}^{k}, \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, s;$$

$$\tilde{c}_{ij}^{k} = c_{ij}^{k} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, s, \quad k = s+1, \ldots, n; \tag{4}$$

$$\tilde{c}_{ij}^{k} = c_{ij}^{k}, \ i \text{ или } j = 1, 2, \ldots, s; \ j \text{ или } i = s+1, \ldots, n; \ k = s+1, \ldots, n;$$

$$\tilde{c}_{ij}^{k} = 0, \quad i \text{ или } j = 1, 2, \ldots, s; \ j \text{ или } i = s+1, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots, s;$$

$$\tilde{c}_{ij}^{k} = 0, \quad i, j = s+1, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

а структурные константы $\tilde{c}_{ijk}^{l}$ ассоциаторов — соотношениями

$$\tilde{c}_{ijk}^{l} = c_{ijk}^{l}, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, s; \quad l = 1, 2, \ldots, s;$$

$$\tilde{c}_{ijk}^{l} = c_{ijk}^{l} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, s; \quad l = s+1, \ldots, n;$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ijk}^{l} = c_{ijk}^{l}, \quad & i, j = 1, 2, \ldots, s; \quad k, l = s+1, \ldots, n; \\ & i, k = 1, 2, \ldots, s; \quad j, l = s+1, \ldots, n; \\ & j, k = 1, 2, \ldots, s; \quad i, l = s+1, \ldots, n; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\tilde{c}_{ijk}^{l} = 0 \text{ при остальных значениях индексов } i, j, k, l.$$

Вторые соотношения в (4) *и* (5) *являются условиями осуществимости сжатия, наложенными на исходную алгебру A.*

Следствие 1. *Неассоциативная алгебра переходит в пределе (при простом сжатии с ε-преобразованием* (3)*) в ассоциативную алгебру тогда и только тогда, когда стабильная подалгебра сама ассоциативна и выполняется соотношение $c_{ijk}^{l} = 0$ при $i, j(i, k; j, k) = 1, 2, \ldots, s$; $k(j; i) = s+1, \ldots, n$; $l = s+1, \ldots, n$.*

Следствие 2. *Необходимым условием того, чтобы неассоциативная нелиева алгебра переходила в пределе в алгебру Ли, является лиевость подалгебры, относительно которой сжатие производится.*

В случае простейшего предельного перехода зависимость формулировки и результата от базиса не очень сильна — понятие подалгебры является инвариантным понятием. Как и в случае алгебр Ли, результат сжатия будет сильно зависеть от выбора базиса при более общих предельных переходах [4, 5].

3. Вопрос предельного перехода из общей неассоциативной алгебры в алгебру Ли представляет значительный интерес для теоретической физики элементарных частиц, ибо в области взаимодействия фундаментальных полей инвариантность относительно алгебр (групп) Ли может не соблюдаться. В связи с этим особый интерес представляют Ли-допустимые алгебры [10]. Что касается деформаций (обратных предельных переходов), то общая проблема обобщенных деформаций линейных алгебр и один конкретный пример рассматривались в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Segal I. E., Duke Math. J., **18**, 221 (1951).
2. Inönü E., Wigner E. P., Proc. Nat. Acad. Sci (USA), **39**, 510 (1953).
3. Saletan E. J., J. Math. Phys., **2**, 1 (1961).
4. Зайцев Г. А., Проблема инвариантно-группового изучения множеств предельных геометрий и специальные подалгебры Ли, Тезисы докл., Всес. геометр. конфер., Киев, 1961.
5. Лыхмус Я., В сб.: II Летняя школа по проблемам теории элементарных частиц, Отепя, 1967; **IV**, Тарту, 1969, с. 1—132.
6. Gerstenhaber M., Ann. Math. (USA), **79**, 59 (1964).
7. Nijenhuis A., Richardson R. W., J. Math. and Mech., **17**, 89 (1967).
8. Лыхмус Я., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **17**, 481 (1968).
9. Мальцев А. И., Матем. сб., **36** (78), 569 (1955).
10. Santilli R. M., Suppl. Nuovo Cimento, **6**, 1225 (1968).
11. Kõiv M., Lõhmus J., In: XV Internat. Conf. High Energy Phys., Kiev, Abstracts, **2**, 1970, p. 631.

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/X 1970

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

УДК 519.27

Э. ЛЕЛУМЕЭС

ЕЩЕ РАЗ О ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПОМОЩИ СКОЛЬЗЯЩИХ ФИЛЬТРОВ

E. LELUMEES. VEEL KORD JUHUSLIKE PROTSESSIDE FILTREERIMISEST LIBISEVATE FILTRITE ABIL

E. LELUMEES. ONCE MORE ON FILTERING RANDOM PROCESSES BY THE USE OF MOVING FILTERS

В предыдущей статье автора [1] использовался метод сопряженных градиентов для определения скользящего фильтра. Отфильтрованный при помощи этого фильтра ряд становится смещенным. В данной заметке выводится фильтр, после применения которого отфильтрованный ряд становится несмещенным. Вводится также еще параболический скользящий фильтр.

Можно показать, что для получения несмещенного отфильтрованного ряда достаточно потребовать, чтобы

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} h(t)\,dt = 1. \tag{1}$$

Для удовлетворения этого условия надо весовые функции $h_2(t)$ и $h_5(t)$ в статье [1] умножить соответственно на коэффициенты $^1/_2$ и $^4/_3$.

Учитывая условия (1), задачу вывода фильтра по соотношению (5)