ЛИТЕРАТУРА

1. Мооге Е., Proc. Sympos. Appl. Math., **14**, 17 (1962).
2. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Биол., **19**, 266 (1970).
3. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 159 (1970).
4. Романовский В., Дискретные цепи Маркова, М., 1949.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/I 1970

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.2.13

УДК 519.95

В. АЛАДЬЕВ, Н. ЕФИМОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СТРУКТУР МУРА

V. ALADJEV, N. JEFIMOV. MOORE'I STRUKTUURIDE MONINGATEST OMADUSTEST

V. ALADYEV, N. EFIMOV. ON SOME PROPERTIES OF MOORE'S STRUCTURES

В данной заметке рассмотрены некоторые задачи, связанные с процессом роста в структурах Мура. Все обозначения, определения и понятия, за исключением введенных впервые, соответствуют работам [1–5]. Предварительно введем некоторые сокращения: КФ — конфигурация; СТ — структура; СКФ — самовоспроизводящаяся КФ.

Предложение 1. *Число полных и дефектных* ST$(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ *соответственно равно* ☆

$$N^{*} = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^{i}C_s^{i}(s-i)^{s^9},$$

$$N^{**} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s-1}(-1)^{i+1}C_s^{i}(s-i)^{s^9}.$$

Доказательство. Для доказательства нам понадобится следующий комбинаторный факт [6]: число различных способов размещения n различных шаров по k различным ящикам (при условии, что нет пустых ящиков) равно

$$N = k^{n} + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i}C_k^{i}(k-i)^{n}. \qquad (1)$$

☆ Оценки, подобные данной и оценкам работ [2–5, 7] могут быть получены и для более общего случая ST$(N, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(m)})$: когда разбиение пространства E^N на N-мерные кубы заменяется разбиением E^N регулярной или полурегулярной N-мерной решеткой с произвольным определением соседства.

Разобьем теперь множество G различных полных $\mathrm{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ на два подмножества G' и G'' следующим образом. Для любой $\mathrm{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)}) \in G'$ отображение $\mathbf{L}_{(1)}: S_{m^2}(i, j, T) \Rightarrow S(i, j, T+1)$ таково, что $(\mathbf{L}_{(1)}: S_{m^2}(i,j,T) \Rightarrow S(i,j,T+1) = S_0 \Leftrightarrow (S_{m^2}(i,j,T) = \overset{0}{S}_{m^2}(i,j,T))$. Число таких $\mathrm{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ нетрудно получить из (1), полагая $k = s-1$ и $n = s^9 - 1$

$$N_{G'} = \sum_{i=0}^{s-2} (-1)^i C^i_{s-1} (s-i-1)^{s^9-1}. \qquad (2)$$

Для любой $\mathrm{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)}) \in G''$ отображение $\mathbf{L}_{(1)}: S_{m^2}(i, j, T) \Rightarrow \Rightarrow S(i, j, T+1)$ таково, что

$$(\exists S_{m^2}(i,j,T) \neq \overset{0}{S}_{m^2}(i,j,T))\,(\mathbf{L}_{(1)}: S_{m^2}(i,j,T) \Rightarrow S(i,j,T+1) = S_0).$$

Число же таких $\mathrm{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ получаем из (1), полагая $k = s$ и $n = s^9 - 1$

$$N_{G''} = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i C^i_s (s-i)^{s^9-1}. \qquad (3)$$

Нетрудно заметить, что любая полная $\mathrm{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ принадлежит либо G', либо G'', т. е. $G = G' \cup G''$ и $G' \cap G'' = \varnothing$. Тогда для $\mathbf{M}[G]$, используя (2) и (3), получаем

$$\mathbf{M}[G] = N_{G'} + N_{G''} = s^{s^9-1} + (s-1)^{s^9-1} + \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^i C^i_s (s-i)^{s^9-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s-2} (-1)^i C^i_{s-1} (s-i-1)^{s^9-1} = s^{s^9-1} - (s-1)^{s^9} + \qquad (4)$$

$$+ \sum_{i=2}^{s-1} (-1)^{i-1} [C^{i-1}_{s-1} - C^i_s] (s-i)^{s^9-1}.$$

Используя теперь тот факт, что $C^{i-1}_{s-1} - C^i_s = \left(\frac{i}{s} - 1\right) C^i_s$, из (4) получаем

$$\mathbf{M}[G] = s^{s^9-1} - (s-1)^{s^9} + \sum_{i=2}^{s-1} (-1)^i \left(1 - \frac{i}{s}\right) C^i_s (s-i)^{s^9-1} =$$

$$= s^{s^9-1} + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^i C^i_s (s-i)^{s^9}.$$

Завершение доказательства уже не составляет труда.

Из предложения 1 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *Число* $\mathrm{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$, *обладающих* НКФ, *не менее* $\frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i+1} C^i_s (s-i)^{s^9}$.

Пусть $\mathbf{M}[X]$ есть мощность произвольного бесконечного множества X. Разобьем X на конечные подмножества X_i так, что $\bigcup_i X_i = X$ и $\bigcap_i X_i = \varnothing$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Пусть каждый $x^* \in X^*_i \subseteq X_i$ (X^*_i может быть пустым) обладает некоторым свойством C. Будем говорить, что почти все $x \in X$ обладают свойством C, если $\lim_{i\to\infty} (\mathbf{M}[\bigcup_i X^*_i]/\mathbf{M}[\bigcup_i X_i]) = 1$.

Следствие 2. *Почти все* $\mathrm{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ *являются полными* СТ.

Будем говорить, что КФ **A** порождена **A** в момент T, если КФ структуры в момент $T=0$ есть **A**, а КФ структуры в момент $T>0$ содержит по крайней мере одну копию **A**.

Под интервалом $\Delta T = 2^T$ будем понимать промежуток времени $<1-2^T>$.

```
              1                  2
            1 1                2 2
          1 2 1              2 2 2
        1 1 1 1            2 2 2 2
      1 2 2 2 1          2 2 2 2 2
    1 1 2 2 1 1        2 2 2 2 2 2
  1 2 1 2 1 2 1      2 2 2 2 2 2 2
1 1 1 1 1 1 1 1    1 1 1 1 1 1 1 1

         A                  B
```

Рассмотрим теперь изображенную на рисунке пару КФ **A** и **B**. КФ типа **A** и **B** рассматривались в [4] в связи с процессом роста в СТ. Можно показать [3], что существует такая СТ $\mathrm{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ при $S: \{S_0 = 0, 1, 2\}$ и с функцией $\mathbf{L}_{(1)}$, определенной соотношениями (4)—(5) из [4], что **A** и **B** являются в ней СКФ. Из вида КФ получаем, что $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, а из более детального изучения роста КФ **A** и **B** следует [4], что число копий **A**, порожденных **A**, и число копий **A**, порожденных **B**, для интервала времени $\Delta T = 2^T$ $(T = 3, \ldots)$ равно соответственно $P_{\mathbf{A}}(T) = 2 \cdot 3^{T-3}$ и $P_{\mathbf{B}}(T) = P_{\mathbf{A}}(T) - 1$, т. е. при $T \to \infty$ $[P_{\mathbf{A}}(T)/P_{\mathbf{B}}(T)] \to 1$. Вышесказанное резюмирует следующее

Предложение 2. *Существует такая* СТ, *что* КФ **A** *и* **B** ($\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$) *являются в ней* СКФ, *причем предел отношения числа копий* **A**, *порожденных* **A**, *к числу копий* **A**, *порожденных* **B**, *за период* ΔT *при* $T \to \infty$ *равен единице.*

Предложение 3. *В* $\mathrm{ST}(1, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$, *содержащей машину Тьюринга, могут существовать* СТКФ *с* ВБ *размера* $m = 2$, *при отсутствии* СТКФ *с* ВБ *размера* $m = 1$ (задача Мура); СТ *может иметь* НКФ *при отсутствии в ней* СТКФ *для* $T \geqslant 0$; *любая система продукций Поста слабо* T*-моделируется некоторой* СТ *и наоборот.*

Подобные результаты для случая $T > 0$ приведены в [3, 5].

В заключение авторы выражают благодарность доценту ТГУ И. Куллю за ряд высказанных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore E., Proc. Sympos. Appl. Math., **14**, 17 (1962).
2. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 159 (1970).
3. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 365 (1970).
4. Аладьев В., О процессах роста в структурах, В сб. трудов НИПТИ, М. (в печати).
5. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Биол., **19**, 266 (1970).
6. Виленкин Н. Я., Комбинаторика, М. (1969).
7. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 205 (1971).

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Эстонской ССР
Республиканский вычислительный центр ЦСУ ЭССР

Поступила в редакцию
12/II 1970