EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.2.12

LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.95

В. АЛАДЬЕВ

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СОТООБРАЗНЫХ СТРУКТУР

V. ALADJEV. ÜHEST STOHHASTILISTE KÄRJESARNASTE STRUKTUURIDE ASÜMPTOOTILISEST OMADUSEST

V. ALADYEV. ON AN ASYMPTOTIC PROPERTY OF STOCHASTIC CELLULAR STRUCTURES

В настоящем сообщении рассмотрены некоторые свойства сотообразных структур (ST) Неймана—Мура, в которых введены вероятностные переходы. Все определения и понятия соответствуют работам [1–3].

1. Детерминированные сотообразные структуры (DST)

Из [2] следует, что любую DST можно задать в виде $\mathbf{DST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{L})$. Пусть $\mathbf{SK}^i\{\mathbf{M}, T\}$ и $\mathbf{S}\{\mathbf{M}, T\}$ есть соответственно i-е подмножество множества всевозможных состояний автомата $\mathbf{M}$ из $\mathbf{R}$ и всех его соседей в смысле Мура и состояние автомата $\mathbf{M}$ в момент T, а $\mathbf{SK}^0\{\mathbf{M}, T\}$ — такая конфигурация, когда $\mathbf{SK}^i\{\mathbf{M}, T\}$ состоит только из $\mathbf{S}_0$. Множества $\mathbf{S}$, множества всевозможных $\mathbf{SK}^i\{\mathbf{M}, T\}$ и функций перехода $\mathbf{L}^f$ содержат соответственно $s+1$, $n_1 = (s+1)^{3^N}$ и $n_2 = (s+1)^{n_1-1}$ элементов [2]. Будем задавать функцию перехода $\mathbf{L}$ в матричной форме $\mathbf{L} = \{l_{ij}\}$ [2]. В дальнейшем будем считать, что множество функций перехода $\mathbf{L}^f$ произвольным образом упорядочено $\{\mathbf{L}_0, \ldots, \mathbf{L}_{n_2-1}\}$. Под матрицей $\mathbf{A}_{<i-j>}$ будем понимать матрицу, которая получена из матрицы $\mathbf{A}$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, а под $\mathbf{L}_v \overset{T}{:} \mathbf{Q}$ — выполнение условия $\mathbf{Q}$, если в момент T в $\mathbf{ST}$ была реализована функция перехода $\mathbf{L}_v \in \mathbf{L}^f$.

2. Стохастические сотообразные структуры (SST)

Определение 1. *Стохастически неоднородной структурой* $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P}_v)$ называется структура, функция перехода которой $\mathbf{L}$ в каждый момент $T > 0$ определяется стохастическими матрицами перехода $\mathbf{P}_v = \{\overset{v}{p}_{ij}\}$ следующим образом:

$$\overset{v}{p}_{00} = 1;\ \overset{v}{p}_{ij} = \mathbf{P}(\mathbf{L}_v \overset{T}{:} (\mathbf{SK}^i\{\mathbf{M}, T\} \rightarrow \mathbf{S}\{\mathbf{M}, T+1\} = \mathbf{S}_j));$$

$$(\forall v),\ (\forall i)\,(\sum_j \overset{v}{p}_{ij} \doteq 1),\ \ (i = \overline{1, n_1 - 1};\ j = \overline{1, s};\ v = \overline{0, n_2 - 1}). \quad (1)$$

Если $\overset{v}{p}_{ij}$ не зависят от v, то такую $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P})$ будем называть *стохастически однородной.*

Легко показать, что $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P}_v \vee \mathbf{P})$ будет полностью определяться матрицами $\mathbf{P}_v$ и столбцом начальных вероятностей $\Pi(0) =$

$=\{\overset{0}{\pi}_0, \ldots, \overset{0}{\pi}_{n_2-1}\}$ $(\overset{0}{\pi}_k = 1,\ \overset{0}{\pi}_i = 0,\ i \neq k)$ реализации в **ST** функции перехода $\mathbf{L}_k \in \mathbf{L}^f$ в момент $T = 0$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая простая

Лемма. *Каждая структура* $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P}_v \vee \mathbf{P})$ *эквивалентна некоторой однородной цепи Маркова.*

Доказательство. Из (1) следует, что в любой момент T в $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P}_v \vee \mathbf{P})$ обязательно реализуется только одна из функций перехода $\mathbf{L}_k \in \mathbf{L}^f$, т. е. в вероятностном плане множество $\mathbf{L}^f$ образует полную группу событий. Из этих же соотношений следует, что в $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P}_v)$ в момент $T+1$ реализуется матрица вероятностей перехода $\mathbf{P}_v$ только тогда, когда в момент T в **ST** была реализована функция перехода $\mathbf{L}_v \in \mathbf{L}^f$.

Установим между множествами $\mathbf{L}^f$ и $\mathbf{P}^f$: $\{\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_{n_2-1}\}$ взаимно однозначное соответствие: $\mathbf{L}_v \longleftrightarrow \mathbf{P}_v$ $(v = \overline{0, n_2-1})$.

Дадим теперь алгоритм нахождения вероятности реализации в **ST** в момент $T+1$ функции перехода $\mathbf{L}_j$ при условии, что в момент T была реализована функция перехода $\mathbf{L}_i$ $(\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j \in \mathbf{L}^f)$. Для этого достаточно вычислить следующие матрицы:

$$\Pi(i, j) = \mathbf{P}_i \oplus \mathbf{L}_j \quad (i, j = \overline{0, n_2-1}),$$

где $\oplus$ — произведение матриц по закону $\{a_{ik}\} \oplus \{b_{ik}\} = \{c_{ik} = a_{ik} \cdot b_{ik}\}$. В качестве вероятностей π_{ij} будем брать числа, получающиеся при перемножении отличных от нуля (если такие существуют) элементов каждой строки матриц $\Pi(i, j)$. Нетрудно убедиться, что фиксируя $i = i^*$ и придавая j значения от 0 до $n_2 - 1$, мы получаем вероятность π_{i^*j} того, что в момент $T+1$ в **ST** реализуется функция $\mathbf{L}_j \in \mathbf{L}^f$ при условии реализации в момент T функции $\mathbf{L}_{i^*}$. Варьируя теперь значение i, получаем матрицу вероятностей перехода $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ $(i, j = \overline{0, n_2-1})$, которая вместе с начальными вероятностями $\Pi(0)$ определяет однородную цепь Маркова [4]. Случай структуры $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P})$ рассматривается аналогично. Этим лемма доказана.

Определение 2. Структура $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P}_v \vee \mathbf{P})$ называется $\mathbf{L}_k$-*сводимой*, если вероятность реализации в ней функции перехода $\mathbf{L}_k$ стремится к единице при достаточно больших T независимо от начальных вероятностей $\Pi(0)$.

Теорема. *Для того, чтобы* $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P}_v)$ *была* $\mathbf{L}_k$-*сводимой, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей однородная цепь Маркова с матрицей* $\Pi = \{\pi_{ij}\}$, *определенной матрицами* $\mathbf{P}_v$, *была регулярной и существовала точка поглощения* $\pi_{kk} = 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P}_v)$ является $\mathbf{L}_k$-сводимой. Из определения 2 следует, что в этом случае соответствующая **ST** однородная цепь Маркова с матрицей Π (см. лемму) должна быть регулярной, а финальные вероятности такой цепи иметь вид $\Pi(\infty) = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0\}$. Запишем очевидное равенство

$$\Pi' \cdot (\Pi')^\infty = (\Pi')^\infty, \quad \text{где} \quad (\Pi')^\infty = \lim_{n \to \infty} (\Pi')^n. \tag{2}$$

Умножая (2) справа на столбец начальных вероятностей $\Pi(0)$ и используя тот факт, что $\Pi(\infty) = \lim_{T \to \infty} (\Pi')^T \cdot \Pi(0)$, получаем систему

$$\Pi' \cdot \Pi(\infty) = \Pi(\infty). \tag{3}$$

А так как для регулярной матрицы Π $\lambda = 1$ является простым корнем характеристического полинома матрицы Π', то столбец $\Pi(\infty)$ определяется однозначно из (3), поскольку его элементы удовлетворяют условию $\pi_i \geqslant 0 (i = \overline{0, n_2 - 1})$ и $\sum_i^\infty \pi_i = 1$. Подставляя теперь столбец $\Pi(\infty)$ в (3), получаем, что должно выполняться соотношение $\pi_{kk} = 1$. Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть матрица $\Pi = \{\pi_{ij}\}$, определенная матрицами $\mathbf{P}_v$ (см. лемму), является регулярной и для нее $\pi_{kk} = 1$. Оставляя теперь взаимно однозначное соответствие $(\mathbf{L}_v \longleftrightarrow \mathbf{P}_v)$ прежним, перенумеруем множество $\mathbf{L}^f$ так, чтобы функция перехода $\mathbf{L}_k$ была в нем последним элементом. В этом случае матрица $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ переходит в матрицу $\Pi^* = \{\pi^*_{ij}\}$ таким образом, что множества π^*_{ij} и π_{ij} состоят из одних и тех же элементов и $\pi^*_{n_2-1,n_2-1} = 1$. Нетрудно показать, что характеристические полиномы матриц Π и Π^* совпадают. Поэтому из регулярности Π следует и регулярность Π^*. Рассмотрим однородную цепь Маркова с матрицей $\Pi^* = \{\pi^*_{ij}\}$, у которой $\pi^*_{n_2-1,n_2-1} = 1$. Тогда матрица $\Pi^{*\prime} = \{\pi^*_{ji}\}$ имеет вид *

$$\Pi^{*\prime} = \langle \Pi^{*\prime}_{<v-v>};\ \mathbf{B} = \{\pi^{*\prime}_{iv}\};\ \pi^*_{v,v} = 1;\ \mathbf{C} = \{\pi^{*\prime}_{vi}\} \rangle,$$

где $\mathbf{B}$ — нулевая матрица-столбец. Так как матрица Π^* является регулярной, то можно показать, что матрица $\mathbf{C}$ не может быть нулевой, а все собственные значения λ_i у $\Pi^{*\prime}_{<v-v>}$ меньше единицы. Используя вид матрицы $\Pi^{*\prime}$, нетрудно найти ее m-ю степень

$$(\Pi^{*\prime})^m = \langle (\Pi^{*\prime}_{<v-v>})^m;\ \mathbf{B};\ 1;\ \mathbf{C} \cdot \sum_{l=0}^{m} (\Pi^{*\prime}_{<v-v>})^l \rangle. \tag{4}$$

Переходя в (4) к пределу при $m \to \infty$ и используя вид ее подматриц, получаем

$$\lim_{m\to\infty} (\Pi^{*\prime})^m = (\Pi^{*\prime})^\infty = \langle 0; 0; 1; (\mathbf{E} - \Pi^{*\prime}_{<v-v>})^{-1} \rangle. \tag{5}$$

А так как любая степень стохастической матрицы является опять стохастической матрицей, то $(\mathbf{E} - \Pi^{*\prime}_{<v-v>})^{-1}$ является единичной матрицей-строкой. Подставляя в окончательном виде матрицу $(\Pi^{*\prime})^\infty$ в систему

$$\Pi^*(\infty) = (\Pi^{*\prime})^\infty \cdot \Pi^*(0),$$

получаем столбец финальных вероятностей $\Pi^*(\infty)$ для матрицы Π^* в виде $\{\underbrace{0, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots, 0\}$ независимо от $\Pi^*(0)$. Возвращаясь теперь обратно к матрице Π, получаем доказательство достаточности, а вместе с ним и доказательство всей нашей теоремы.

Следствие. $\mathbf{SST}(N, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{S}_0, \mathbf{P})$ *не может быть* $\mathbf{L}_k$-*сводимой. Если матрица* $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ $(i, j = \overline{1, n})$ *стохастична, регулярна и* $a_{kk} = 1$, *то* $\{a_{ik}\}' \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{A}'_{<k-k>})^{-1} = \{b_i = 1\}$ $(i = \overline{1, n};\ i \neq k)$.

По нашему мнению, стохастический подход сможет прояснить и некоторые вопросы, поставленные Э. Муром в [1].

* $v = n_2 - 1;\ i = \overline{0, n_2 - 2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore E., Proc. Sympos. Appl. Math., **14**, 17 (1962).
2. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Биол., **19**, 266 (1970).
3. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 159 (1970).
4. Романовский В., Дискретные цепи Маркова, М., 1949.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/I 1970

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

УДК 519.95

В. АЛАДЬЕВ, Н. ЕФИМОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СТРУКТУР МУРА

V. ALADJEV, N. JEFIMOV. MOORE'I STRUKTUURIDE MONINGATEST OMADUSTEST

V. ALADYEV, N. EFIMOV. ON SOME PROPERTIES OF MOORE'S STRUCTURES

В данной заметке рассмотрены некоторые задачи, связанные с процессом роста в структурах Мура. Все обозначения, определения и понятия, за исключением введенных впервые, соответствуют работам [1–5]. Предварительно введем некоторые сокращения: КФ — конфигурация; СТ — структура; СКФ — самовоспроизводящаяся КФ.

П р е д л о ж е н и е 1. *Число полных и дефектных* $\mathrm{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ *соответственно равно* ☆

$$N^* = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i C_s^i (s-i)^{s^9},$$

$$N^{**} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i+1} C_s^i (s-i)^{s^9}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства нам понадобится следующий комбинаторный факт [6]: число различных способов размещения n различных шаров по k различным ящикам (при условии, что нет пустых ящиков) равно

$$N = k^n + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i C_k^i (k-i)^n. \tag{1}$$

☆ Оценки, подобные данной и оценкам работ [2–5, 7] могут быть получены и для более общего случая $\mathrm{ST}(N, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(m)})$: когда разбиение пространства E^N на N-мерные кубы заменяется разбиением E^N регулярной или полурегулярной N-мерной решеткой с произвольным определением соседства.