EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.2.05

УДК 535.3

М. ХАЛЛИК

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СУММАРНОЙ ЧАСТОТЫ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ МНОГОСЛОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛЕНКОЙ

I. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Выведены общие формулы, определяющие амплитуды электромагнитных волн суммарной частоты, распространяющихся по обе стороны от многослойной нелинейной пленки, помещенной между двумя линейными средами, если из одной среды на данную пленку падают две плоские волны с разными частотами. Расчет выполнен для случая перпендикулярной поляризации генерируемых волн.

Введение

Ввиду той значительной роли, которую играют многослойные интерференционные пленки в обычной линейной оптике, представляет интерес изучение оптических свойств тонких пленок в случае их оптической нелинейности. Свойства нелинейной плоскопараллельной пластины изучены Н. Бломбергеном [1]. В настоящей статье, обобщая результаты Н. Бломбергена, рассмотрим генерацию электромагнитных волн суммарной частоты, распространяющихся по обе стороны от многослойной пленки, составленной из нелинейных слоев и помещенной между двумя линейными средами. Из одной среды (исходной) на пленку падают две плоские волны с разными, вообще говоря, частотами ω' и ω''. В пленке они возбуждают волну нелинейной поляризации с суммарной частотой

$$\omega = \omega' + \omega''. \qquad (1)$$

В результате в каждом слое пленки возникают две однородные и четыре неоднородные волны с частотой ω (описываемые, соответственно, решениями однородного и неоднородного волновых уравнений). В исходной же и конечной средах возбуждаются только однородные волны с этой же суммарной частотой («отраженная» и «прошедшая» волны). Нашей целью в данной статье является вывод формул, определяющих амплитуды этих волн в зависимости от состава и нелинейных свойств пленки. При этом ограничимся случаем перпендикулярной поляризации. Весь расчет проведем в так наз. приближении заданного поля, т. е., считая нелинейность слабой, не будем учитывать обратного действия генерируемых волн на первичные волны, и амплитуды последних будем считать независимыми от нелинейности.

В теории оптических пленок наиболее продуктивным является так наз. матричный метод, который мы используем здесь в формулировке П. Карда [2].

Исходные положения

Пусть пленка содержит N плоскопараллельных слоев, нумеруемых в направлении падения первичных волн $1, 2, \ldots, N$; 0 и $N+1$ — индексы исходной и конечной сред. Углы падения волн с частотами ω' и ω'' обозначим через θ'_0 и θ_0''. Плоскости падения этих волн в общем случае различны. Выберем плоскость, перпендикулярную к пленке, такую, чтобы сумма перпендикулярных к ней компонент волновых векторов обеих падающих волн была равна нулю. Очевидно, это будет так и для всех отраженных и преломленных волн во всех средах. Примем в качестве таковой плоскость xz, а ось z направим перпендикулярно к пленке в направлении падения света. Углы, образуемые плоскостями падения волн с плоскостью xz, обозначим как φ_0' и φ_0''. Показатель преломления m-й среды пусть имеет для частот ω' и ω'' значения n'_m и n_m'', а для суммарной частоты ω — n_m.

Амплитуды электрического вектора волн с частотами ω' и ω'' в m-й среде обозначим через $E'_{\pm m}$ и $E''_{\pm m}$, где индексы «+» и «—» относятся к прямой и обратной волнам соответственно. Эти амплитуды можно вычислить обычными методами линейной теории интерференционных пленок. Поэтому мы будем считать их известными величинами.

Волновой вектор нелинейной поляризации $\mathbf{P}_m$ (в [1] $\mathbf{P}^{NLS}$; для простоты мы опустим индексы NLS), возбуждаемой в m-й среде волнами $\mathbf{E}'_{\pm m}$ и $\mathbf{E}''_{\pm m}$, лежит, очевидно, в плоскости xz. Общая формула такова [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \varkappa \exp \{i[\omega t - (n'k' \sin\theta' \cos\varphi' + n''k'' \sin\theta'' \cos\varphi'')x]\} \times \\ \times \{\mathbf{E}'_+ \mathbf{E}''_+ \exp[-i(n'k' \cos\theta' + n''k'' \cos\theta'')z] + \\ + \mathbf{E}'_- \mathbf{E}''_- \exp[i(n'k' \cos\theta' + n''k'' \cos\theta'')z] + \\ + \mathbf{E}'_+ \mathbf{E}''_- \exp[-i(n'k' \cos\theta' - n''k'' \cos\theta'')z] + \\ + \mathbf{E}'_- \mathbf{E}''_+ \exp[i(n'k' \cos\theta' - n''k'' \cos\theta'')z]\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где θ', θ'' — углы преломления первичных волн;

$$\left.\begin{aligned} k' = \frac{\omega'}{c}, \\ k'' = \frac{\omega''}{c} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и $\varkappa$ — нелинейная восприимчивость (тензор 3-го ранга). Для простоты индекс среды в (2) опущен.

Чтобы упростить формулу (2), положим (см. [1])

$$\sin\theta = \frac{n'k' \sin\theta' \cos\varphi' + n''k'' \sin\theta'' \cos\varphi''}{nk}, \tag{4}$$

где

$$k = k' + k'' = \frac{\omega}{c}; \tag{5}$$

далее,

$$\sin\theta_{\pm} =$$

$$= \frac{n'k'\sin\theta'\cos\varphi' + n''k''\sin\theta''\cos\varphi''}{\sqrt{(n'k'\sin\theta'\cos\varphi' + n''k''\sin\theta''\cos\varphi'')^2 + (n'k'\cos\theta' \pm n''k''\cos\theta'')^2}}, \tag{6}$$

а также

$$n_{\pm} = \frac{n\sin\theta}{\sin\theta_{\pm}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n'^2k'^2 + n''^2k''^2 \pm 2n'n''k'k''(\cos\theta'\cos\theta'' + \sin\theta'\sin\theta''\cos(\varphi' - \varphi''))}}{k' + k''}. \tag{7}$$

Индекс среды у всех величин в формулах (4), (6) и (7) также опущен.

Наконец, обозначим

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}_{++} &= \varkappa \mathbf{E}'_{+}\mathbf{E}''_{+}, \\ \mathbf{P}_{--} &= \varkappa \mathbf{E}'_{-}\mathbf{E}''_{-}, \\ \mathbf{P}_{+-} &= \varkappa \mathbf{E}'_{+}\mathbf{E}''_{-}, \\ \mathbf{P}_{-+} &= \varkappa \mathbf{E}'_{-}\mathbf{E}''_{+}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Теперь формула (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \exp[i(\omega t - knx\sin\theta)]\{&\mathbf{P}_{++}\exp(-ikn_{+}z\cos\theta_{+}) + \\ &+ \mathbf{P}_{--}\exp(ikn_{+}z\cos\theta_{+}) + \mathbf{P}_{+-}\exp(-ikn_{-}z\cos\theta_{-}) + \\ &+ \mathbf{P}_{-+}\exp(ikn_{-}z\cos\theta_{-})\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Электрический вектор генерируемых на частоте ω волн удовлетворяет неоднородному волновому уравнению *

$$\Delta\mathbf{E} + n^2k^2\mathbf{E} = -k^2\mathbf{P}. \tag{10}$$

В случае перпендикулярной поляризации решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E = {} & \mathcal{E}_{+}\exp(-iknz\cos\theta) + \mathcal{E}_{-}\exp(iknz\cos\theta) + \\ & + \frac{P_{++}\exp(-ikn_{+}z\cos\theta_{+}) + P_{--}\exp(ikn_{+}z\cos\theta_{+})}{n_{+}^2 - n^2} + \\ & + \frac{P_{+-}\exp(-ikn_{-}z\cos\theta_{-}) + P_{-+}\exp(ikn_{-}z\cos\theta_{-})}{n_{-}^2 - n^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь опущен одинаковый у всех членов множитель $\exp[i(\omega t - knx\sin\theta)]$. Первые два члена изображают однородные волны, последние четыре — неоднородные.

Формула (11) имеет место в каждой из $N+2$ сред; только для ограничивающих сред она принимает более простой вид, так как в них все $P = 0$ и, кроме того, в исходной среде $\mathcal{E}_{+0} = 0$, а в последней среде $\mathcal{E}_{-,N+1} = 0$. Амплитуды же $\mathcal{E}_{-0}$ и $\mathcal{E}_{+,N+1}$ являются искомыми.

* См. [1], уравнение (2.4) на с. 336. Мы опустили только множитель 4π, включив его в $\mathbf{P}$.

Рекуррентная формула

Чтобы применить в нашей задаче матричный метод, следует учесть граничные условия. Обозначив

$$kh_m n_m \cos\theta_m = \alpha_m,$$
$$kh_m n_{\pm m} \cos\theta_{\pm m} = \alpha_{\pm m}, \tag{12}$$

где h_m — толщина m-го слоя, запишем граничные условия на границе m-й и $(m+1)$-й сред

$$\mathcal{E}_{+m}e^{-i\alpha_m} + \mathcal{E}_{-m}e^{i\alpha_m} + \frac{P_{++m}e^{-i\alpha_{+m}} + P_{--m}e^{i\alpha_{+m}}}{n_{+m}^2 - n_m^2} +$$

$$+ \frac{P_{+-m}e^{-i\alpha_{-m}} + P_{-+m}e^{i\alpha_{-m}}}{n_{-m}^2 - n_m^2} = \tag{13}$$

$$= \mathcal{E}_{+,m+1} + \mathcal{E}_{-,m+1} + \frac{P_{++,m+1} + P_{--,m+1}}{n_{+,m+1}^2 - n_{m+1}^2} +$$

$$+ \frac{P_{+-,m+1} + P_{-+,m+1}}{n_{-,m+1}^2 - n_{m+1}^2},$$

$$-n_m \cos\theta_m \mathcal{E}_{+m}e^{-i\alpha_m} + n_m \cos\theta_m \mathcal{E}_{-m}e^{i\alpha_m} +$$

$$+ \frac{n_{+m}\cos\theta_{+m}}{n_{+m}^2 - n_m^2}(-P_{++m}e^{-i\alpha_{+m}} + P_{--m}e^{i\alpha_{+m}}) +$$

$$+ \frac{n_{-m}\cos\theta_{-m}}{n_{-m}^2 - n_m^2}(-P_{+-m}e^{-i\alpha_{-m}} + P_{-+m}e^{i\alpha_{-m}}) =$$

$$= -n_{m+1}\cos\theta_{m+1}\mathcal{E}_{+,m+1} + n_{m+1}\cos\theta_{m+1}\mathcal{E}_{-,m+1} +$$

$$+ \frac{n_{+,m+1}\cos\theta_{+,m+1}}{n_{+,m+1}^2 - n_{m+1}^2}(-P_{++,m+1} + P_{--,m+1}) +$$

$$+ \frac{n_{-,m+1}\cos\theta_{-,m+1}}{n_{-,m+1}^2 - n_{m+1}^2}(-P_{+-,m+1} + P_{-+,m+1}). \tag{14}$$

Чтобы выразить эти соотношения в матричном виде, введем следующие обозначения:

$$\sqrt{n\cos\theta}\begin{pmatrix}\mathcal{E}_+\\ \mathcal{E}_-\end{pmatrix} = A, \tag{15}$$

$$\frac{\sqrt{n_\pm \cos\theta_\pm}}{n_\pm^2 - n^2}\begin{pmatrix}P_{+\pm}\\ P_{-\mp}\end{pmatrix} = P_\pm, \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix}e^{i\alpha} & 0\\ 0 & e^{-i\alpha}\end{pmatrix} = M(\alpha), \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix}\operatorname{ch} v & \operatorname{sh} v\\ \operatorname{sh} v & \operatorname{ch} v\end{pmatrix} = G(v), \tag{18}$$

и

$$\left.\begin{aligned} v_{ik} &= \frac{1}{2}\ln\frac{n_i\cos\theta_i}{n_k\cos\theta_k}, \\ v_{\pm ik} &= \frac{1}{2}\ln\frac{n_i\cos\theta_i}{n_{\pm k}\cos\theta_{\pm k}}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Тогда граничные условия (13) и (14) можно записать в виде одной матричной формулы

$$\begin{aligned} A_m = M(\alpha_m)\,[\,&G(v_{m,m+1})A_{m+1} + \\ &+ G(v_{+m,m+1})P_{+,m+1} + G(v_{-m,m+1})P_{-,m+1} - \\ &- G(v_{+mm})M(-\alpha_{+m})P_{+m} - \\ &- G(v_{-mm})M(-\alpha_{-m})P_{-m}]. \end{aligned} \tag{20}$$

Чтобы упростить эту рекуррентную формулу и получить с ее помощью окончательную компактную формулу для всей пленки, введем временно вспомогательную матрицу

$$\begin{aligned} B_m \equiv A_m &+ M(\alpha_m)G(v_{+mm})M(-\alpha_{+m})P_{+m} + \\ &+ M(\alpha_m)G(v_{-mm})M(-\alpha_{-m})P_{-m}. \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда после простых преобразований формула (20) примет вид

$$B_m = M(\alpha_m)\,G(v_{m,m+1})\,(B_{m+1} + H_{m+1}), \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} H_m = [\,&G(v_{+mm}) - M(\alpha_m)G(v_{+mm})M(-\alpha_{+m})\,]P_{+m} + \\ +[\,&G(v_{-mm}) - M(\alpha_m)G(v_{-mm})M(-\alpha_{-m})\,]P_{-m}. \end{aligned} \tag{23}$$

Вывод окончательной формулы

Применим формулу (22) последовательно ко всем границам раздела. Учитывая, что вследствие линейности ограничивающих сред

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= A_0, \\ B_{N+1} &= A_{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

находим

$$\begin{aligned} A_0 = G(v_{01})(B_1 + H_1) &= G(v_{01})M(\alpha_1)G(v_{12})(B_2 + H_2) + \\ + G(v_{01})H_1 &= G(v_{01})M(\alpha_1)G(v_{12})M(\alpha_2)G(v_{23})(B_3 + H_3) + \\ &+ G(v_{01})M(\alpha_1)G(v_{12})H_2 + G(v_{01})H_1 \end{aligned}$$

и т. д.
Обозначая (см. [2])

$$G(v_{01})M(\alpha_1)G(v_{12})M(\alpha_2)\ldots M(\alpha_{k-1})G(v_{k-1,k}) = F_{0k}, \tag{25}$$

получим

$$A_0 = F_{0,N+1}A_{N+1} + H_{1N}, \tag{26}$$

где

$$H_{1N} = \sum_{k=1}^{N} F_{0k}H_k. \tag{27}$$

Эти простые и компактные формулы определяют искомые амплитуды $\mathcal{E}_{-0}$ и $\mathcal{E}_{+,N+1}$. Так как согласно формуле (15)

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \sqrt{n_0 \cos\theta_0}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_{-0} \end{pmatrix}, \\ A_{N+1} &= \sqrt{n_{N+1}\cos\theta_{N+1}}\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{+,N+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

то

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_{-0} &= \frac{F_{11}H_2 - F_{21}H_1}{F_{11}\sqrt{n_0 \cos\theta_0}}, \\ \mathcal{E}_{+,N+1} &= -\frac{H_1}{F_{11}\sqrt{n_{N+1}\cos\theta_{N+1}}}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где индексы $0, N+1$ и $1N$ у F и H опущены и вместо них написаны индексы элементов этих матриц.

Интересно сравнить полученные выражения (29) с коэффициентами отражения и пропускания пленки в случае падения на нее волны с суммарной частотой ω под углом θ_0, но без учета нелинейностей. Эти коэффициенты выражаются (см. [2]) через элементы матрицы $F_{0,N+1}$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{F_{21}}{F_{11}}, \\ d &= \frac{1}{F_{11}}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Здесь d есть коэффициент пропускания «второго рода», равный отношению амплитуд пропущенной и падающей волн, умноженному на $\sqrt{\frac{n_{N+1}\cos\theta_{N+1}}{n_0\cos\theta_0}}$, так что

$$rr^* + dd^* = 1. \tag{31}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_{-0}\sqrt{n_0\cos\theta_0} &= H_2 - rH_1 \\ \mathcal{E}_{+,N+1}\sqrt{n_{N+1}\cos\theta_{N+1}} &= -H_1 d. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Вместо амплитуд $\mathcal{E}_{-0}$ и $\mathcal{E}_{+,N+1}$ можно ввести коэффициенты

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{\mathcal{E}_{-0}\sqrt{n_0\cos\theta_0}}{\sqrt{|\mathcal{E}_{-0}|^2 n_0\cos\theta_0 + |\mathcal{E}_{+,N+1}|^2 n_{N+1}\cos\theta_{N+1}}}, \\ \delta &= \frac{\mathcal{E}_{+,N+1}\sqrt{n_{N+1}\cos\theta_{N+1}}}{\sqrt{|\mathcal{E}_{-0}|^2 n_0\cos\theta_0 + |\mathcal{E}_{+,N+1}|^2 n_{N+1}\cos\theta_{N+1}}}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

причем

$$\varrho\varrho^* + \delta\delta^* = 1. \tag{34}$$

Смысл этих коэффициентов состоит, очевидно, в том, что в сумме интенсивностей пучков света суммарной частоты, приходящихся на единицу площади пленки, интенсивность пучка в 0-й среде («отраженный» пучок) составляет долю $\varrho\varrho^*$, а интенсивность пучка в $(N+1)$-й среде («прошедший» пучок) — долю $\delta\delta^*$. Теперь из формул (32) и (33) находим

$$
\left.
\begin{aligned}
\varrho &= \frac{H_2 - H_1 r}{\sqrt{H_1 H_1^* + H_2 H_2^* - r H_1 H_2^* - r^* H_1^* H_2}},\\
\delta &= -\frac{H_1 d}{\sqrt{H_1 H_1^* + H_2 H_2^* - r H_1 H_2^* - r^* H_1^* H_2}}.
\end{aligned}
\right\} \tag{35}
$$

Полученные результаты показывают, что в нашей задаче, наряду с обычными линейными свойствами пленки, описываемыми матрицей $F_{0,N\pm1}$, основную роль играет еще матрица H_{1N}. В свою очередь эта матрица зависит от линейных матриц $F_{01}, F_{02}, \ldots, F_{0N}$ и от матриц $H_1, H_2, \ldots, H_N$, каждая из которых согласно формуле (23) выражается через нелинейные характеристики соответствующего слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бломберген Н., Нелинейная оптика, М., 1966.
2. Кард П. Г., Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок (в печати).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
13/VII 1970

M. HALLIK

MITMEKIHILISE MITTELINEAARSE KILE POOLT GENEREERITUD SUMMAARSE SAGEDUSEGA ELEKTROMAGNETILISTE LAINETE ARVUTUS

I. Ristpolarisatsioon

Vaadeldakse mitmekihilist tasaparalleelset mitteneelavat optiliselt mittelineaarset kilet, mida ümbritsevad kaks lineaarset keskkonda. Kui ühest nendest keskkondadest langevad kilele erineva sagedusega ja erinevatest suundadest kaks elektromagnetilist tasalainet, siis tekib kile kõikides kihtides mittelineaarne polarisatsioon. See genereerib elektromagnetilisi laineid, mille sagedus on langevate lainete sageduste summa. Mõlemalt poolt kilet ümbritsevates keskkondades levivate genereeritud lainete amplituudid E_{-0} ja $E_{+,N+1}$ on arvutatud maatriksmeetodil. Seejuures eeldati, et need lained on risti polariseeritud, ning piirduti käsitluses antud välja lähendusega. Tulemus on esitatud valemite (29) näol, kus n_0, n_{N+1} on ümbritsevate keskkondade murdumisnäitajad, Θ_0 ja Θ_{N+1} tähendavad nurki, millede all genereeritud lained levivad, F_{11} ja F_{21} on maatriksi $F_{0,N+1}$ elemendid, mis esitab lineaarses keskkonnas kile optilisi omadusi vastavalt valemile (25), H_1 ja H_2 on maatriksi H_{1N} elemendid; vastavalt valemile (27) on maatriks H_{1N} maatriksite H_k lineaarne funktsioon. Igaüks viimastest sõltub vastavalt valemile (23) täiesti kindlal viisil mittelineaarsest polarisatsioonist kile vastavas kihis.

M. HALLIK

BERECHNUNG DER ELEKTROMAGNETISCHEN WELLEN SUMMARISCHER FREQUENZ, DIE VON EINER MEHRSCHICHTIGEN NICHTLINEAREN LAMELLE ERZEUGT WERDEN

I. Senkrechte Polarisation

Man betrachtet eine mehrschichtige planparallele nichtabsorbierende optisch nichtlineare Lamelle, die von zwei linearen Medien begrenzt ist. Wenn seitens eines dieser Medien zwei ebene elektromagnetische Wellen von verschiedener Frequenz und in verschiedener Richtung auf die Lamelle fallen, so entsteht in allen Schichten der Lamelle

eine nichtlineare Polarisation. Von dieser werden elektromagnetische Wellen erzeugt, deren Frequenz Summe der Frequenzen der einfallenden Wellen ist. Die Amplituden E_{-0} und $E_{+,\,N+1}$ der erzeugten Wellen, die sich beiderseits der Lamelle in umschließenden Medien verbreiten, werden nach der Matrixmethode berechnet. Dabei wird senkrechte Polarisation dieser Wellen vorausgesetzt und die ganze Betrachtung auf die Annäherung des gegebenen Feldes beschränkt. Das Ergebnis wird durch die Formeln (29) dargestellt. Daselbst sind n_0, n_{N+1} Brechungsindizes der begrenzenden Medien. Θ_0 und Θ_{N+1} bedeuten die Winkel, unter denen die erzeugten Wellen sich verbreiten, F_{11} und F_{21} sind Elemente der Matrix $F_{0,\,N+1}$, die laut der Formel (25) die optischen Eigenschaften der Lamelle im linearen Bereich darstellt, und H_1, H_2 sind Elemente der Matrix H_{1N}, die gemäß der Formel (27) eine lineare Funktion der Matrizen H_k ist. Jede der letzteren hängt nach der Formel (23) in ganz bestimmter Weise von der nichtlinearen Polarisation in der entsprechenden Schicht der Lamelle ab.