EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.2.03

УДК 519.3 : 51 : 62—50

*А. ОЛЬМ*

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ СИНТЕЗА СУБОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Синтез оптимального управления $u(t)$ линейной динамической системой с квадратичным критерием качества порождается линейным замкнутым законом вида

$$u(t) = -H(t)x(t),$$

где $x(t)$ — текущее состояние системы, а элементы матрицы коэффициентов усиления обратной связи $H(t)$ вычисляются на основании решения дифференциально-матричного уравнения Риккати [1]. Вычисление матрицы $H(t)$ для систем большой размерности сопряжено, однако, с большими техническими трудностями. Поэтому в последние годы было предложено несколько методов для нахождения субоптимальных управлений, реализация которых менее трудоемка (см., напр., [2-4]).

В данной статье предлагается метод, по которому исходную систему и критерий качества аппроксимируют полностью сепарабельными путем введения постоянных блочно-диагональных матриц. Оптимальные управления полученными независимыми подсистемами берутся в качестве субоптимального для исходной системы. Используя вероятностный критерий [3], выведены необходимые условия для оптимального выбора вышеупомянутых блочно-диагональных матриц. Описывается вычислительная схема на двух уровнях для нахождения этих матриц градиентным методом. Приводится числовой пример.

1. Будем рассматривать линейную динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)$ — $n$-мерный вектор состояния; $u(t)$ — $m$-мерный вектор управления; $A(t)$ и $B(t)$ — соответственно $n \times n$ и $n \times m$ матрицы, непрерывные по $t$; $x_0$ — заданное начальное сотояние системы.

Задача состоит в определении такого управления $u(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$, которое минимизировало бы критерий качества

$$I(u) = x'(t_1)Px(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt, \tag{2}$$

где $P$ и $Q(t)$ — симметричные неотрицательно определенные $n \times n$ матрицы; $R(t)$ — симметричная положительно определенная $m \times m$ матрица; $Q(t)$ и $R(t)$ непрерывны по $t$.

Можно показать (см., напр., [1]), что при сделанных предположениях оптимальное управление в задаче (1)—(2) порождается линейным замкнутым законом управления

$$u(t) = -H(t)x(t), \tag{3}$$

где

$$H(t) = R^{-1}(t)B'(t)K(t), \tag{4}$$

а симметричная неотрицательно определенная $n \times n$ матрица $K(t)$ является решением дифференциально-матричного уравнения Риккати

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t), \\ K(t_1) = P. \end{cases} \tag{5}$$

Известно, что при применении оптимального управления (3) величину критерия качества (2) можно вычислить по формуле

$$I_{\text{opt}} = x_0' K(t_0) x_0. \tag{6}$$

Если в выражении (3) матрицу $H(t)$ заменить произвольной $m \times n$ матрицей $L(t)$, то критерий качества (2), соответствующий новому управлению, равен

$$I = x_0' V(t_0) x_0, \tag{7}$$

где $V(t)$ является решением линейного дифференциально-матричного уравнения

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = -[A(t) - B(t)L(t)]'V(t) - V(t)[A(t) - B(t)L(t)] - \\ \qquad - Q(t) - L'(t)R(t)L(t), \\ V(t_1) = P. \end{cases} \tag{8}$$

Если через $\Phi(\tau, t)$ обозначить переходную матрицу, соответствующую матрице $[A(\tau) - B(\tau)L(\tau)]$, то

$$V(t) = \Phi'(t_1, t)P\Phi(t_1, t) + \int_t^{t_1} \Phi'(\tau, t)[Q(\tau) + L'(\tau)R(\tau)L(\tau)]\Phi(\tau, t)\,d\tau. \tag{9}$$

2. Для определения субоптимального управления в задаче (1)—(2) аппроксимируем матрицу $A(t)$ матрицей $C$, $B(t)$ — матрицей $D$, $P$ — матрицей $SS'$, $Q(t)$ — матрицей $TT'$ и $R(t)$ — матрицей $(UU' + \beta E)^{-1}$, где $\beta$ есть малое положительное число и $E$ — единичная матрица порядка $m$. Вводимые постоянные матрицы $C$, $D$, $S$, $T$ и $U$ имеют согласованное блочно-диагональное строение: вдоль главных диагоналей этих матриц стоят соответственно $n_i \times n_i$ подматрицы $C_i$, $n_i \times m_i$ подматрицы $D_i$, $n_i \times j_i$ подматрицы $S_i$, $n_i \times k_i$ подматрицы $T_i$ и $m_i \times l_i$ подматрицы $U_i$, все остальные элементы их равны нулю. Здесь $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N (n \geqslant N \geqslant 2)$, $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$ и $\sum_{i=1}^{N} m_i = m$. Выбор величин $j_i$, $k_i$, $l_i$ не ограничен.

Очевидно, что полученная динамическая система распадается на $N$ независимых подсистем

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u_i(t), \\ x_i(t_0) = x_{0i} \end{cases} \tag{10}$$

с минимизируемыми критериями качества

$$I_i(u_i) = x_i'(t_1) S_i S_i' x_i(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [x_i'(t) T_i T_i' x_i(t) + u_i'(t) \hat{U}_i^{-1} u_i(t)]\,dt, \tag{11}$$

где

$$\hat{U}_i = U_i U_i' + \beta E_i. \tag{12}$$

Оптимальные управления подсистемами (10) определяются по формулам (ср. (3)—(5))

$$u_i(t) = -L_i(t) x_i(t), \tag{13}$$

где

$$L_i(t) = \hat{U}_i D_i' K_i(t), \tag{14}$$

а $K_i(t)$ находится из уравнения

$$\begin{cases} \dot{K}_i(t) = -C_i' K_i(t) - K_i(t) C_i - T_i T_i' + K_i(t) D_i \hat{U}_i D_i' K_i(t), \\ K_i(t_1) = S_i S_i'. \end{cases} \tag{15}$$

В качестве субоптимального управления исходной системой (1) берутся оптимальные управления (13). При субоптимальном управлении критерий качества (2) приобретает значение, вычисляемое на основании формул (7) и (9), где теперь

$$L(t) = \begin{pmatrix} L_1(t) & & & 0 \\ & L_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & L_N(t) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

а $L_i(t)$ $(i = 1, \ldots, N)$ определяются из выражений (14) и (15).

Основная задача заключается в том, чтобы выбрать вводимые постоянные матрицы $C_i$, $D_i$, $S_i$, $T_i$ и $U_i$ оптимальным образом. При этом минимизируемым критерием качества выбора этих матриц возьмем, следуя идеям работы [3], след матрицы $V(t_0)$, обозначаемый через

$$\operatorname{tr} V(t_0). \tag{17}$$

Известно, что минимизация критерия (17) эквивалентна минимизации ожидаемого значения критерия (2) при условии, что начальное состояние $x(t_0)$ есть случайная переменная, равномерно распределенная по поверхности $n$-мерной единичной сферы [3].

Для определения оптимальных матриц $C_i$, $D_i$, $S_i$, $T_i$ и $U_i$ нужно вычислить «частные» градиенты функционала (17) по этим матрицам.

Пусть матрице усиления $L(t)$ соответствует матрица $V(t)$. Если матрица $L(t)$ получает приращение $\varepsilon \Delta L(t)$, то соответственную варьированную матрицу (9) обозначим через $V_\varepsilon(t)$. Следуя идеям работ [3, 4], можно показать, что в первом приближении по $\varepsilon$ имеет место равенство

$$\operatorname{tr}[V_\varepsilon(t_0) - V(t_0)] = -2\varepsilon \operatorname{tr} \int_{t_0}^{t_1} W'(t, t_0) \Delta L(t)\, dt, \tag{18}$$

где введено обозначение

$$W(t, t_0) = [B'(t) V(t) - R(t) L(t)] \Phi(t, t_0) \Phi'(t, t_0). \tag{19}$$

Поскольку скалярное произведение двух матриц с одинаковыми размерностями определяется формулами

$$(M, F) = \operatorname{tr}(M'F) = \operatorname{tr}(F'M) = \operatorname{tr}(FM'), \tag{20}$$

то нашей ближайшей целью будет привести выражения (18) к виду

$$\operatorname{tr}[V_\varepsilon(t_0) - V(t_0)] = \varepsilon \sum_{i=1}^{N} [\operatorname{tr}(G'_{C_i} \Delta C_i) + \operatorname{tr}(G'_{D_i} \Delta D_i) + \\ + \operatorname{tr}(G'_{S_i} \Delta S_i) + \operatorname{tr}(G'_{T_i} \Delta T_i) + \operatorname{tr}(G'_{U_i} \Delta U_i)]. \tag{21}$$

Тогда $G_{C_i}$, $G_{D_i}$, $G_{S_i}$, $G_{T_i}$ и $G_{U_i}$ являются искомыми «частными» градиентами функционала $\operatorname{tr} V(t_0)$.

3. Пусть матрицы $C_i$, $D_i$, $S_i$, $T_i$ и $U_i$ получают малые приращения $\varepsilon\Delta C_i$, $\varepsilon\Delta D_i$, $\varepsilon\Delta S_i$, $\varepsilon\Delta T_i$ и $\varepsilon\Delta U_i$. Тогда матрицы $S_iS_i'$, $T_iT_i'$ и $\hat{U}_i$ (см. (12)) получают в первом приближении по $\varepsilon$ приращения, равные соответственно

$$\varepsilon(\Delta S_iS_i' + S_i\Delta S_i'), \quad \varepsilon(\Delta T_iT_i' + T_i\Delta T_i'), \quad \varepsilon(\Delta U_iU_i' + U_i\Delta U_i'),$$

а матрицы усиления (14) при оптимальном управлении в подзадачах (10)—(11) изменяются на

$$\varepsilon\Delta L_i(t) = \varepsilon(\Delta U_iU_i' + U_i\Delta U_i')D_i'K_i(t) + \varepsilon\hat{U}_i\Delta D_i'K_i(t) + \varepsilon\hat{U}_iD_i'\Delta K_i(t), \tag{22}$$

где $\Delta K_i(t)$ является решением дифференциально-матричного уравнения (ср. (15))

$$\begin{aligned}\Delta\dot{K}_i(t) = &-[C_i - D_i\hat{U}_iD_i'K_i(t)]'\Delta K_i(t) - \Delta K_i(t)[C_i - D_i\hat{U}_iD_i'K_i(t)] - \\ &-\Delta C_i'K_i(t) - K_i(t)\Delta C_i - \Delta T_iT_i' - T_i\Delta T_i' + K_i(t)\Delta D_i\hat{U}_iD_i'K_i(t) + \\ &+ K_i(t)D_i[\Delta U_iU_i' + U_i\Delta U_i']D_i'K_i(t) + K_i(t)D_i\hat{U}_i\Delta D_i'K_i(t)\end{aligned} \tag{23}$$

с граничным условием

$$\Delta K_i(t_1) = \Delta S_iS_i' + S_i\Delta S_i'. \tag{24}$$

Пусть матрице

$$C_i - D_i\hat{U}_iD_i'K_i(\tau) \tag{25}$$

соответствует переходная матрица $\Psi_i(\tau, t)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta K_i(t) = &\Psi_i'(t_1, t)[\Delta S_iS_i' + S_i\Delta S_i']\Psi_i(t_1, t) + \\ &+ \int_t^{t_1}\Psi_i'(\tau, t)\{\Delta C_i'K_i(\tau) + K_i(\tau)\Delta C_i + \Delta T_iT_i' + T_i\Delta T_i' - \\ &- K_i(\tau)\Delta D_i\hat{U}_iD_i'K_i(\tau) - K_i(\tau)D_i[\Delta U_iU_i' + U_i\Delta U_i']D_i'K_i(\tau) - \\ &- K_i(\tau)D_i\hat{U}_i\Delta D_i'K_i(\tau)\}\Psi_i(\tau, t)\,d\tau.\end{aligned} \tag{26}$$

Используя выражения (26) и (22), можно формулу (18) привести к виду (21). При этом применяются свойства (20) и то очевидное обстоятельство, что след матрицы равен сумме следов подматриц, расположенных вдоль главной диагонали.

Обозначим через $W_{ii}(t, t_0)$ $m_i \times n_i$-мерную подматрицу, которая состоит из элементов матрицы $W(t, t_0)$, находящихся на пересечении строк с порядковыми номерами от $\sum_{k=1}^{i-1} m_k + 1$ до $\sum_{k=1}^{i} m_k$ и столбцов с номерами от $\sum_{k=1}^{i-1} n_k + 1$ до $\sum_{k=1}^{i} n_k$.

Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned}Z_i(\tau, t, t_0) = &\Psi_i(\tau, t)W_{ii}'(t, t_0)\hat{U}_iD_i'\Psi_i'(\tau, t) + \\ &+ \Psi_i(\tau, t)D_i\hat{U}_iW_{ii}(t, t_0)\Psi_i'(\tau, t).\end{aligned} \tag{27}$$

Опуская несложные выкладки, выпишем окончательные выражения для «частных» градиентов критерия качества (17) субоптимального управления по вводимым матрицам $C_i$, $D_i$, $S_i$, $T_i$ и $U_i$ $(i = 1, \ldots, N)$.

$$G_{C_i} = -2 \int_{t_0}^{t_1} [ \int_{t}^{t_1} K_i(\tau) Z_i(\tau, t\ t_0) d\tau] dt, \tag{28}$$

$$G_{D_i} = -2 \int_{t_0}^{t_1} [K_i(t) W_{ii}'(t, t_0) \hat{U}_i - \int_{t}^{t_1} K_i(\tau) Z_i(\tau, t, t_0) K_i(\tau) D_i \hat{U}_i\, d\tau] dt, \tag{29}$$

$$G_{S_i} = -2 \int_{t_0}^{t_1} Z_i(t_1, t, t_0) S_i\, dt, \tag{30}$$

$$G_{T_i} = -2 \int_{t_0}^{t_1} [ \int_{t}^{t_1} Z_i(\tau, t, t_0) T_i\, d\tau] dt, \tag{31}$$

$$G_{U_i} = -2 \int_{t_0}^{t_1} [ W_{ii}(t, t_0) K_i(t) D_i U_i + D_i' K_i(t) W_{ii}'(t, t_0) U_i -$$

$$- \int_{t}^{t_1} D_i' K_i(\tau) Z_i(\tau, t, t_0) K_i(\tau) D_i U_i\, d\tau] dt. \tag{32}$$

Необходимым условием оптимальности для выбора матриц $C_i$, $D_i$, $S_i$, $T_i$, $U_i$ является равенство нулю выражений (28)—(32).

4. Для вычисления оптимальных относительно критерия (17) матриц $C_i$, $D_i$, $S_i$, $T_i$, $U_i$ градиентным методом можно применять следующую двухуровневую схему.

А. На уровне подсистем (первый уровень) при вычисленных на предыдущей итерации матрицах $C_i$, $D_i$, $S_i$, $T_i$, $U_i$ (на первой итерации они заданы) выполняются следующие действия:

1) путем решения дифференциально-матричных уравнений Риккати (15) определяются матрицы $K_i(t)$;

2) вычисляются переходные матрицы $\Psi_i(\tau, t)$ из уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\Psi_i(\tau, t)}{d\tau} = [C_i - D_i \hat{U}_i D_i' K_i(\tau)] \Psi_i(\tau, t), \\ \Psi_i(t, t) = E_i; \end{cases} \tag{33}$$

3) определяются по формуле (14) матрицы $L_i(t)$; эти матрицы передаются второму уровню (центру).

Б. Второй уровень.

1) Вычисляется переходная матрица $\Phi(t, t_0)$ из уравнения

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = [A(t) - B(t) L(t)] \Phi(t, t_0), \\ \Phi(t_0, t_0) = E; \end{cases} \tag{34}$$

2) решением уравнения (8) (или по формуле (9)) определяется матрица $V(t)$;

3) находится по выражению (19) матрица $W(t, t_0)$; подматрицы $W_{ii}(t, t_0)$ сообщаются обратно подсистемам (первому уровню).

В. Первый уровень.

1) Вычисляются по формулам (27) матрицы $Z_i(\tau, t, t_0)$;

2) определяются по выражениям (28)—(32) «частные» градиенты;

3) вычисляются новые приближения по следующим формулам:

$$C_i := C_i - \alpha G_{C_i}; \quad D_i := D_i - \alpha G_{D_i}; \quad S_i := S_i - \alpha G_{S_i};$$

$$T_i := T_i - \alpha G_{T_i}; \quad U_i := U_i - \alpha G_{U_i}, \tag{35}$$

где $\alpha$ — неотрицательный шаг итерации.

Процесс повторяется начиная с пункта А.

5. Рассмотрим числовой пример.

Пусть $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ и

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ -1 & 0,8 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1,5 \\ -1,5 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Выбираем за начальные приближения

$$C_i = D_i = S_i = T_i = U_i = 1 \quad (i = 1, 2). \tag{36}$$

Пусть $\beta = 0{,}00001$ и $\alpha = 0{,}1$.

Выбранным начальным приближениям соответствуют

$$V(t_0) = \begin{pmatrix} 2{,}761\,327 & 1{,}055\,794 \\ 1{,}055\,794 & 3{,}794\,344 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{tr}\, V(t_0) = 6{,}555\,672.$$

После пятой итерации

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}615\,948 & 0 \\ 0 & 1{,}092\,610 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1{,}093\,392 & 0 \\ 0 & 1{,}257\,922 \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 0{,}999\,779 & 0 \\ 0 & 1{,}021\,797 \end{pmatrix};$$

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}799\,991 & 0 \\ 0 & 0{,}995\,782 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 0{,}548\,012 & 0 \\ 0 & 1{,}439\,803 \end{pmatrix}; \tag{37}$$

Приближениям (37) соответствуют

$$V(t_0) = \begin{pmatrix} 1{,}227\,684 & 0{,}644\,243 \\ 0{,}644\,243 & 3{,}612\,288 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{tr}\, V(t_0) = 4{,}839\,972.$$

По формуле (7) можно установить, что при субоптимальном управлении с применением приближений (37) значение критерия качества (2) при любых начальных состояниях системы (1) меньше, чем в случае применения приближений (36).

Если определить норму матрицы $F$ по формуле

$$\|F\| = \sqrt{\mathrm{tr}\,(FF')},$$

то тогда сумма квадратов норм всех «частных» градиентов на первой итерации равна 50,435 108, а на шестой итерации эта сумма уменьшится до 0,435 635.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R. E., In: Math. Opt. Techniques, ed. R. E. Bellmann, Berkeley, Univ. Calif. Press, 1963.
2. Meditch J. S., IEEE Trans. Autom. Control, **11**, 433 (1966).
3. Kleinman D. L., Athans M., IEEE Trans. Autom. Control, **13**, 150 (1968).
4. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 150 (1970).

*Эстонский научно-исследовательский институт земледелия и мелиорации*

Поступила в редакцию 16/X 1970

*A. OLM*

## ÜHEST DEKOMPOSITSIOONIMEETODIST SUBOPTIMAALSETE JUHTIMISTE SÜNTEESIMISEKS

Ruutkriteeriumiga lineaarse dünaamilise süsteemi juhtimiste sünteesimisülesanne aproksimeeritakse sõltumatute alamülesannetega konstantsete blokkdiagonaalsete maatriksite sissetoomise teel. Saadud alamsüsteemide optimaalseid juhtimisi kasutatakse lähtesüsteemi suboptimaalseks juhtimiseks. Teatava tõenäosusliku kriteeriumi põhjal tuletatakse tarvilikud tingimused nimetatud blokkdiagonaalsete maatriksite optimaalseks valikuks. Kirjeldatakse nende maatriksite leidmiseks sobivat kahenivoolist gradiendimeetodil põhinevat iteratsiooniprotsessi.

*A. OLM*

## ON A METHOD OF DECOMPOSITION FOR SYNTHESIS OF SUBOPTIMAL CONTROL

This paper deals with the problem of synthesis of control law for linear dynamical system with quadratic performance criterion. Some constant block diagonal matrices are used to approximate this problem by independent subproblems. The optimal feedback controls for subsystems are taken as suboptimal feedback control for the original system. Necessary conditions for choice of optimal block diagonal matrices are derived, using a certain probability criterion. A two-level iterative process for the computation of such matrices via gradient method is described.