EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.2.02

УДК 517.211

Т. ТОБИАС

О НАХОЖДЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРАВИЛ ОСТАНОВКИ ДЛЯ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВРЕМЕНИ

Многие задачи об оптимальной остановке марковского процесса можно заменить эквивалентной краевой задачей с неизвестной границей [1-3], но для решения последней нет хороших методов. В данной работе приведен способ решения одной такой краевой задачи с постоянными коэффициентами в случае, когда задано максимальное возможное время для наблюдения за процессом. Дополнительные условия для определения неизвестной границы выведены из экстремальных свойств решения. Исследуется связь между решением краевой задачи и ценой соответствующего правила остановки.

1. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность случайных величин с известным совместным распределением. Мы имеем возможность последовательно наблюдать эти величины, но должны в некоторый момент $n \leqslant N$ остановиться, причем если мы прекратим наблюдения в момент n, то получим выигрыш $y_n = c_n(x_1, \ldots, x_n, n)$. Требуется найти правило остановки, максимизирующее математическое ожидание выигрыша.

Так как максимальное возможное время наблюдения N заранее зафиксировано, то нет принципиальных трудностей при решении этой задачи. Для получения численного ответа можно воспользоваться методом динамического программирования. Но если нас интересует качественная сторона проблемы (например зависимость результата от параметров данного распределения), то методом динамического программирования удовлетворительных результатов получить трудно.

В данной работе предполагается, что описанную дискретную задачу можно заменить непрерывной. Например, если $c_n(x_1, \ldots, x_n, n) = c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, n\right)$, то сумму $\sum_{i=1}^{n} x_i$ можно часто приближенно заменить диффузионным процессом x_t и рассматривать задачу с непрерывным временем и с функцией выигрыша $c(x, t)$.

2. Пусть x_t — винеровский процесс со сносом a, $M[x_{t+\Delta t} - x_t] = a\Delta t$, $M[x_{t+\Delta t} - x_t]^2 = b^2\Delta t$ и пусть $\mathfrak{T}_T$ — множество всевозможных марковских моментов (м. м.) $\tau \leqslant T$. Пусть функция выигрыша $c(x, t)$ является непрерывной функцией, $M\{\sup_{t\in[0,T]} [-\min(c(x_t, t), 0)]\} < \infty$. Требуется найти м. м. τ^* так, чтобы цена

$$s(x,t) = \sup_{\tau\in\mathfrak{T}_T} M_{x,t}c(x_\tau, \tau) = M_{x,t}c(x_{\tau^*}, \tau^*).$$

Для решения этой задачи нужно сперва найти наименьшую эксцессивную мажоранту (н. э. м.) функции $c(x, t)$ (с учетом условия $t \leqslant T$), которая при сделанных допущениях существует и совпадает с ценой $s(x, t)$ (см. [2]).

Определим множество $D = \{(x, t) : s(x, t) = c(x, t)\}$, которое является непустым (легко видеть, что $s(x, T) = c(x, T)$) и достижимым с вероятностью 1 для процесса (x_t, t). Поэтому оптимальная стратегия τ^* существует и предусматривает остановку при первом достижении процессом (x_t, t) множества D. Так как $s(x, t)$ является непрерывным снизу [2], то D — замкнутое множество. Задание множества D разделяет область $E = \{(x, t) : -\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ на две части: открытую область C, где нужно продолжить наблюдения, и замкнутую область остановки D. В зависимости от функции $c(x, t)$ область C (а тем самым и D) может состоять из отдельных частей. В дальнейшем предположим, что процесс начичается всегда из одной и той же точки (x, t), и рассмотрим лишь ту часть C (или D), которая является окрестностью точки (x, t) и любые две точки которой можно соединить ломаной, целиком принадлежащей области C (или D). Область C зададим в виде

$$C = \{(x, t) : \sigma_1(t) < x < \sigma_2(t),\ 0 < t < T\}.$$

Непрерывные кривые $x = \sigma_1(t)$ и $x = \sigma_2(t)$ вместе с линией $t = T$ образуют границу Γ области C. Множество всевозможных границ обозначим через A, а момент первого достижения процессом (x_t, t) границы Γ через τ_Γ.

Так как существование н. э. м. $s(x, t)$ заранее известно, то нахождение ее значения $s(x, t)$ в зафиксированной точке (x, t) эквивалентно следующей задаче: найти область C, для которой (x, t) является внутренней точкой и граница Γ которой реализует экстремум выражения $\sup\limits_{\Gamma \in A} M_{x,t} c(x_{\tau_\Gamma}, \tau_\Gamma)$. Если при любой окрестности $M_{x,t} c(x_{\tau_\Gamma}, \tau_\Gamma) \leqslant c(x, t)$, то $(x, t) \in D$ и $s(x, t) = c(x, t)$. Из существования н. э. м. вытекает, что граница Γ не зависит от точки $(x, t) \in C$.

Известно, что при некоторых ограничениях функция $u(x, t) = M_{x,t} c(x_{\tau_\Gamma}, \tau_\Gamma)$ является решением параболического уравнения. Именно, пусть а) $c(x, t)$ — непрерывная на границе Γ функция; б) граница Γ обладает свойством строгой сферичности извне (для любой точки $(\overline{x}, \overline{t}) \in \Gamma$ найдется замкнутая сфера $S_{x,t}$ такая, что $S_{x,t} \cap \overline{C} = \{(\overline{x}, \overline{t})\}$). Тогда

$$u_t + a u_x + b^2/2\, u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in C; \tag{1}$$

$$u(x, t) = c(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma. \tag{2}$$

Обозначим через A' множество всевозможных границ, удовлетворяющих условию б. Требуется найти такую границу $\Gamma \in A'$, при которой решение $u_\Gamma(x, t)$ краевой задачи (1)—(2) является максимальным одновременно для всех точек $(x, t) \in C$.

Ввиду того, что $A' \subset A$, имеет место соотношение $u_\Gamma(x, t) \leqslant s(x, t)$. В общем случае нельзя утверждать, что найдется $\Gamma^* \in A'$ такое, что $\sup\limits_{\Gamma \in A'} u_\Gamma(x, t) = u_{\Gamma^*}(x, t) = s(x, t)$. Именно, н. э. м. $s(x, t)$ может обладать слишком плохими дифференциальными свойствами, чтобы являться решением уравнения (1). Но $s(x, t)$ является решением краевой задачи (1)—(2) в обобщенном смысле: найдется такая последовательность областей $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ с соответствующими границами $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ (где $\Gamma_i \in A'$), что $\lim\limits_{n \to \infty} u_{\Gamma_n}(x, t) = s(x, t)$ для всех $(x, t) \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$.

Последнее утверждение вытекает из сопоставления следующих фактов: 1) функционал $F(\Gamma) = M_{x,t}c(x_{\tau_\Gamma}, \tau_\Gamma)$ является непрерывным в классе $\{\Gamma\} \in A$; 2) A' является всюду плотным классом в A.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть $f(x)$ — непрерывный функционал на множестве B некоторого метрического пространства и пусть $B' \subseteq B$ — всюду плотное в B множество. Тогда каждая точка максимума (минимума) функционала $f(x)$ на множестве B' является точкой максимума (минимума) и на множестве B.*

Доказательство леммы очевидно.

Итак, ограничимся нахождением максимальных в указанном смысле решений краевой задачи (1)—(2). Для этого мы должны в дальнейшем сделать некоторые априорные утверждения о гладкости неизвестной границы Г. Если задача имеет единственное глобальное решение в этом более узком (но плотном в A) классе, то по лемме оно является также решением первоначальной задачи, т. е. $u_\Gamma(x,t) = s(x,t)$.

3. Преобразуем уравнение (1) к обычному виду уравнения теплопроводности. Без ограничения общности предположим, что $a = 0$ (этого можно добиться заменой переменных $x = y + at$) и $b = \sqrt{2}$. Так как решение ищется на конечном промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$, то можно обратить время заменой $t \to T - t$.

Таким образом, краевая задача (1)—(2) преобразуется к виду (сохраняя прежние обозначения):

$$\begin{aligned} &u_{xx} - u_t = 0, && (x,t) \in C; \\ &u(x,t) = c(x,t), && (x,t) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Чтобы привести граничные условия к однородным, положим $u(x,t) = v(x,t) + c(x,t)$. Предположим, что $c(x,t)$ является один раз по t и дважды по x непрерывно дифференцируемой функцией, причем $f(x,\ t) = c_{xx}(x,\ t) - c_t(x,\ t)$ удовлетворяет по x (или по t) условию Гёльдера. Тогда имеем

$$v_t - v_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in C; \tag{3}$$

$$v(x,0) = 0;\ v[\sigma_1(t), t] = v[\sigma_2(t), t] = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Приведем один известный результат [4], который дает представление решения $v(x,\ t)$ через граничные значения самой функции и ее производной.

Пусть $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ являются на отрезке $[0,\ T]$ непрерывно дифференцируемыми функциями, причем $\sigma_1(t) < \sigma_2(t)$. Рассмотрим область $C = \{(x,\ t) : \sigma_1(t) < x < \sigma_2(t),\ 0 < t < T\}$ и пусть $v(x,\ t)$ является внутри области C решением уравнения (3), где $f(x,\ t)$ — непрерывная в C функция, удовлетворяющая по x (или по t) условию Гёльдера. Обозначим

$$E(x,t) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v(x,t) = &\int_\Gamma [v_x E(x-\xi,\ t-\tau) - v E_\xi(x-\xi,\ t-\tau)]d\tau + \\ &+ \int_\Gamma vE(x-\xi,\ t-\tau)d\xi + \iint_C f(\xi,\tau)E(x-\xi,\ t-\tau)d\xi\, d\tau. \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда при граничных условиях (4) получим

$$v(x,t) = -\int_0^t v_x[\sigma_1(\tau),\tau]E[x-\sigma_1(\tau), t-\tau]d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t v_x[\sigma_2(\tau),\tau]E[x-\sigma_2(\tau),\, t-\tau]d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} f(\xi,\tau)E(x-\xi,\, t-\tau)d\xi\, d\tau.$$

Найдем необходимые условия для функции $\sigma_2(t)$, чтобы решение $v(x, t)$ имело экстремальное значение при любой $(x, t)\in C$ ($\sigma_1(t)$ — зафиксировано). Для этого рассмотрим $v(x, t) = v(\sigma_1, \sigma_2, x, t)$ как функционал от σ_2 и найдем его вариацию (обозначим $\lim\limits_{x\to\sigma(t)-0} v_{xx}(x,t) = v_{xx}[\sigma(t), t]$)

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} v(\sigma_1,\, \sigma_2+\varepsilon\bar\sigma,\, x,\, t)\Big|_{\varepsilon=0} = \int\limits_0^t \{f[\sigma_2(\tau),\tau]+v_{xx}^{-}[\sigma_2(\tau),\tau]\}\times$$
$$\times E[x-\sigma_2(\tau),\, t-\tau]\bar\sigma(\tau)d\tau+\int\limits_0^t v_x[\sigma_2(\tau),\tau]E_\xi[x-\sigma_2(\tau),\, t-\tau]\bar\sigma(\tau)d\tau=$$
$$=\int\limits_0^t\left\{v_t[\sigma_2(\tau),\tau]+\frac{x-\sigma_2(\tau)}{2(t-\tau)}v_x[\sigma_2(\tau),\tau]\right\}\times$$
$$\times E[x-\sigma_2(\tau),\, t-\tau]\bar\sigma(\tau)d\tau=0.$$

Имея в виду произвольность функции $\bar\sigma(\tau)$ и точки $(x, t)\in C$, получим следующие необходимые условия для неизвестной границы $\sigma_2(\tau)$:

$$v_t[\sigma_2(\tau),\tau]=0,\qquad v_x[\sigma_2(\tau),\tau]=0\quad \text{при}\quad 0<\tau<t. \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем под значением производной от решения на границе подразумевается предел производной изнутри области C.

Первое из условий (6) является следствием второго. Действительно, так как $v[\sigma_2(\tau),\tau]\equiv 0$, то

$$\frac{d}{d\tau}v[\sigma_2(\tau),\tau] = v_x[\sigma_2(\tau),\tau]\dot\sigma_2(\tau)d\tau+v_t[\sigma_2(\tau),\tau]d\tau\equiv 0.$$

Аналогичное условие получается и для границы $\sigma_1(\tau)$.

Мы вывели дополнительные условия для определения неизвестной границы из свойств решения краевой задачи (3)—(4). Вывод дополнительных условий на границе, исходя из вероятностного содержания задачи, имеется в ряде работ [1–3, 5].

4. Пусть задана краевая задача

$$u_t-u_{xx}=f(x,t); \tag{7}$$
$$u(x,0)=g(x),\quad \sigma_1(0)\leqslant x\leqslant\sigma_2(0);\quad u[\sigma_i(t),t]=\varphi_i(t), \tag{8}$$
$$u_x[\sigma_i(t),t]=\psi_i(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad i=1,2. \tag{9}$$

Найдем $u(x, t)$, $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ такие, чтобы (7)—(9) были удовлетворены. При известных из класса A' функциях $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ найдется единственное решение краевой задачи (7)—(8). Два условия (9) заданы для определения неизвестной границы.

Задача нахождения решения параболического уравнения с неизвестной границей встречается также при изучении теплопроводности, когда вещество претерпевает фазовые превращения (например при плавлении вещества). На неизвестной границе задается дополнительное условие теплообмена (условие Стефана), которое и определяет эту границу.

Решению этой задачи посвящена обширная литература (см. [4]), но большинство указанных методов использует специальный вид условия Стефана и не приспособлено для решения задачи (7)—(9). Но одним из этих методов, приведением задачи к интегральным уравнениям, можно воспользоваться и в нашем случае.

Используя представление (5), запишем $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{2}{}'(-1)^i\int_0^t[\psi_i(\tau)+\varphi_i(\tau)\dot{\sigma}_i(\tau)]E[x-\sigma_i(\tau),\ t-\tau]d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}{}'(-1)^{i+1}\int_0^t\varphi_i(\tau)E_\xi[x-\sigma_i(\tau),\ t-\tau]d\tau+$$

$$+\int_{\sigma_1(0)}^{\sigma_2(0)}g(\xi)E(x-\xi,\ t)d\xi+\int_0^t\int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)}f(\xi,\tau)E(x-\xi,\ t-\tau)d\xi\,d\tau=$$

$$=U(x,t;\sigma_1,\sigma_2,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2,f)=U(x,t).$$

Из свойств потенциалов простого и двойного слоя вытекает, что

$$\lim_{x\to\sigma_1(t)+0}u(x,t)=U[\sigma_1(t),t]+{}^1/_2\varphi_1(t)$$

и

$$\lim_{x\to\sigma_2(t)-0}u(x,t)=U[\sigma_2(t),t]+{}^1/_2\varphi_2(t).$$

Приведем одну известную формулу [6]

$$\frac{d}{dx}\int_0^t\frac{[x-\sigma(\tau)]}{4\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{[x-\sigma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau=$$

$$=-\varphi(0)\,(2\sqrt{\pi t})^{-1}\exp\left\{-\frac{[x-\sigma(0)]^2}{4t}\right\}-\int_0^t\dot{\varphi}(\tau)E[x-\sigma(\tau),\ t-\tau]d\tau-$$

$$-\int_0^t\varphi(\tau)\dot{\sigma}(\tau)E_\xi[x-\sigma(\tau),\ t-\tau]d\tau,$$

воспользуясь которой, имеем

$$u_x(x,t)=\sum_{i=1}^{2}{}'(-1)^i\left\{\int_0^t[\psi_i(\tau)+\varphi_i(\tau)\dot{\sigma}_i(\tau)]E_x[x-\sigma_i(\tau),t-\tau]d\tau+\right.$$

$$+(-1)^i\varphi_i(0)\,(2\sqrt{\pi t})^{-1}\exp\left\{-\frac{[x-\sigma_i(0)]^2}{4t}\right\}+(-1)^i\int_0^t\dot{\sigma}_i(\tau)\varphi_i(\tau)\times$$

$$\left.\times E_\xi[x-\sigma_i(\tau),\ t-\tau]d\tau+(-1)^i\int_0^t\dot{\varphi}_i(\tau)E[x-\sigma_i(\tau),\ t-\tau]d\tau\right\}+$$

$$+\int_{\sigma_1(0)}^{\sigma_2(0)}g(\xi)E_x(x-\xi,\ t)d\xi+\int_0^t\int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)}f(\xi,\tau)E_x(x-\xi,\ t-\tau)d\xi\,d\tau=V(x,t).$$

Из этого выражения получим, что

$$\lim_{x\to\sigma_1(t)+0}u_x(x,t)=V[\sigma_1(t),t]+{}^1/_2[\psi_1(t)+\varphi_1(t)\dot{\sigma}_1(t)]-$$

$$-{}^1/_2\varphi_1(t)\dot{\sigma}_1(t)=V[\sigma_1(t),t]+{}^1/_2\psi_1(t).$$

Аналогично

$$\lim_{x\to\sigma_2(t)-0} u_x(x,t) = V[\sigma_2(t),t] + {}^1\!/_2\psi_2(t).$$

Итак, вместо краевой задачи (7)—(9) имеем следующую систему уравнений:

$$\varphi_1(t) = 2U[\sigma_1(t),t], \tag{10}$$

$$\varphi_2(t) = 2U[\sigma_2(t),t], \tag{11}$$

$$\psi_1(t) = 2V[\sigma_1(t),t], \tag{12}$$

$$\psi_2(t) = 2V[\sigma_2(t),t]. \tag{13}$$

В этих уравнениях фигурирует шесть функций, которые связаны соотношением (5) (если в последнем $x\to\sigma_i(t)$). Введем обозначение $\Omega = \{\varphi_i(t),\ \psi_i(t),\ \sigma_i(t);\ i=1,2\}$. Из вывода уравнений видно, что любая система Ω, удовлетворяющая первым двум уравнениям (10), (11) и соотношению (5), является также решением уравнений (12) и (13). Таким образом, если требовать выполнения (5), то система (10)—(13) является зависимой системой.

Оказывается, что система из уравнений (10) и (11) и краевая задача (7)—(9) эквивалентны. Зададим, например, функции $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ $(i=1,2)$. Допустим, что из уравнений (10) и (11) можно найти $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$. Подставим полученную систему Ω в выражение (5). Из вывода уравнений (10) и (11) ясно, что полученная функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию $u[\sigma_i(t),t] = \varphi_i(t)$. Нужно проверить, выполняется ли равенство $\lim\limits_{x\to\sigma_i(t)} u_x[\sigma_i(t),t] = \psi_i(t)$.

Допустим, что $\lim\limits_{x\to\sigma_i(t)} u_x(x,t) = \overline{\psi_i}(t)$ и обозначим $\psi_i(t) - \overline{\psi_i}(t) = \gamma_i(t)$.

Тогда из (5) получим, что

$$u(x,t) = U(x,t,\sigma_1,\sigma_2,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2,f) = U(x,t,\sigma_1,\sigma_2,\varphi_1,\varphi_2,\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,f).$$

Другими словами,

$$\int_0^t E[x-\sigma_2(\tau),\ t-\tau]\gamma_2(\tau)\,d\tau - \int_0^t E[x-\sigma_1(\tau),\ t-\tau]\gamma_1(\tau)\,d\tau = 0.$$

Дифференцируя это тождество по x и устремляя $x\to\sigma_1(t)+0$ и $x\to\sigma_2(t)-0$, получим

$$\int_0^t \frac{[\sigma_i(t)-\sigma_1(\tau)]^2}{4\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{[\sigma_i(t)-\sigma_1(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\}\gamma_1(\tau)\,d\tau - \int_0^t \frac{[\sigma_i(t)-\sigma_2(\tau)]^2}{4\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{[\sigma_i(t)-\sigma_2(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\}\gamma_2(\tau)\,d\tau = -{}^1\!/_2\gamma_i(t), \quad i=1,2. \tag{14}$$

Если кривые $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ не пересекаются, то подынтегральные выражения являются ограниченными. Поэтому система (14), являясь однородной системой интегральных уравнений Вольтерра относительно $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, имеет единственное решение, следовательно, $\gamma_i(t)\equiv 0$.

Аналогично, найдя $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ из уравнений (12) и (13), можно проверить, что полученная при помощи (5) функция удовлетворяет краевым условиям (8).

5. Применим результаты предыдущего пункта к решению задачи об оптимальной остановке, т. е. задачи (7)—(9), где $g(x)=0$ и $\varphi_i(t)=\psi_i(t)=0$. Образуем функционал $G(x, t; \sigma_1, \sigma_2)=$ $=\int\limits_0^t \int\limits_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} f(\xi,\tau)E(x-\xi, t-\tau)\,d\xi\,d\tau$. Значения $\sigma_i(t)$ неизвестной границы в точке $\tau=t$ можно найти из условий

$$G[\sigma_i(t), t; \sigma_1, \sigma_2]=0. \quad i=1,2. \tag{15}$$

Эта процедура согласуется с принципом Беллмана, согласно которому значение $\sigma_i(t)$ можно найти лишь после того, как известна предыдушая часть границы $\sigma_i(\tau)$ $(0\leqslant\tau<t)$ (напомним, что у нас время обращено, т. е. $t\to T-t$).

Для приближенного нахождения границ можно применить следующую процедуру. Допустим, что известны значения $\sigma_i(0)$ (их нахождение рассмотрим ниже). На отрезке $0\leqslant\tau\leqslant t_1$ сделаем замену $\sigma_i(\tau)\approx$ $\approx\sigma_i(0)+\alpha_i\tau=\overline{\sigma}_i(\tau)$. Затем из уравнений $G[\sigma_i(0)+\alpha_i t_1, t_1; \overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2]=0$ найдем неизвестные α_i и т. д.

Из уравнений (15) видно, что решение проблемы зависит целиком от характера выражения $f(x,t)=c_{xx}(x,t)-c_t(x,t)$. Если $f(x,t)>0$ на всей полосе $\{(x,t)\colon -\infty<x<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, то вся полоса является областью продолжения. Если $f(x,t)<0$, то во всех точках нужно остановиться (область продолжения является пустым множеством).

Предыдущее вытекает также из следующего. Так как (см. обозначения пункта 3) $u(x,t)=v(x,t)+c(x,t)$, то ясно, что продолжать наблюдение в точке (x,t) имеет смысл лишь тогда, когда $v(x,t)\geqslant 0$. При любой заданной границе $\Gamma\in A'$ дополнительный выигрыш $v(x,t)$ является решением уравнения $v_t-v_{xx}=f(x,t)$, $v|_\Gamma=0$. Рассмотрим уравнение $w_t-w_{xx}=0$, $w|_\Gamma=0$. Из теорем сравнения для параболических уравнений вытекает, что $f(x,t)>0\Rightarrow v>w\equiv 0$ и $f(x,t)<0\Rightarrow v<\equiv 0$.

Задача является не тривиальной лишь в случае, когда функция $f(x,t)$ меняет знак. Легко, однако, видеть, что число линий, при пересечении которых функция $f(x,t)$ меняет знак, не определяет число отдельных областей остановки.

Если, наконец, $f(x,t)\equiv 0$ (т. е. $c(x,t)$ — параболическая функция), то $v(x,t)\equiv 0$ и $u(x,t)=c(x,t)$. В этом случае в любой точке (x,t) можно применить любой м. м. остановки τ; величина выигрыша не зависит от стратегии.

Отметим еще, что если $c(x,t)=h(x,t)+\varepsilon(x,t)$, где $h(x,t)$ — параболическая функция, то области остановки для функций выигрыша $c(x,t)$ и $\varepsilon(x,t)$ совпадают. Если $\alpha(x,t)$ — н. э. м. для функции $\varepsilon(x,t)$, то $u(x,t)=h(x,t)+\alpha(x,t)$.

Теперь легко найти необходимые условия для точек $\sigma_i(0)$. Ради удобства вернемся к первоначальному отсчету времени (тогда вместо $\sigma_i(0)$ имеем $\sigma_i(T)$). В точках $[\sigma_i(T), T]$ выполнено условие $f[\sigma_i(T), T]=$ $=c_{xx}[\sigma_i(T),T]+c_t[\sigma_i(T),T]=0$, $i=1,2$. Действительно, пусть, например, $f[\sigma_2(T),T]>0$. Тогда для точки $[\sigma_2(T),T]$ найдется окрестность $C'=\{\beta_1(\tau)\leqslant x\leqslant\beta_2(\tau),\ T-\delta\leqslant\tau\leqslant T\}$, где $f(x,t)>0$. При этом можно выбором δ добиться того, что $[\beta_1(\tau),\tau]\in C$, а $[\beta_2(\tau),\tau]\in D$ при любых $T-\delta\leqslant\tau\leqslant T$. Зафиксируем произвольную точку $(x,t)\in$ $\in C'\cap D$ и рассмотрим стратегию, согласно которой из точки (x,t) следует продолжить наблюдение до момента первого выхода из области $\{\sigma_2(\tau) < x < \beta_2(\tau),\ T-\delta \leqslant t < T\}$. Соответствующий выигрыш обозначим через v_δ. Из теорем сравнения для параболических уравнений легко вывести, что $v_\delta(x,t) > c(x,t)$. Но это противоречит выбору точки $(x,t) \in D$.

Область, где $f(x,t) > 0$, принадлежит области C. Поэтому линии, вдоль которых $f(x,t) = 0$, являются оценками изнутри для неизвестных границ.

Сделаем еще одно замечание о взаимосвязи между решением краевой задачи (7)—(9) с однородными начальными и краевыми условиями и проблемой оптимальной остановки. Может оказаться, что некоторые решения принимают отрицательные значения. Среди всевозможных решений (7)—(9) искомым является наименьшее неотрицательное решение. Так как существование последнего заранее известно, то в случае единственности решения (7)—(9) это решение является искомым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григелионис Б. И., Ширяев А. Н., Теория вероятностей и ее применение, **XI**, 612 (1966).
2. Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1969.
3. Chernoff H., Sankyā, ser. A, **30**, 221 (1968).
4. Рубинштейн Л. И., Проблема Стефана, Рига, 1967.
5. Bather J. A., Proc. Camb. Phil. Soc., **58**, 599 (1962).
6. Kolodner I. I., Comm. Pure and Appl. Math., **IX**, 1 (1956).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
17/VI 1970

T. TOBIAS

WIENERI PROTSESSI OPTIMAALNE PEATAMINE LÕPLIKU AJAVAHEMIKU KORRAL

Optimaalsete peatusreeglite leidmine asendatakse vaba rajaga paraboolset tüüpi diferentsiaalvõrrandite lahendamisega. Lisatingimus tundmata raja leidmiseks tuletatakse lahendi ekstremaalsetest omadustest. Saadud rajaülesanne taandatakse teatavat tüüpi funktsionaalvõrrandite süsteemiks ja vaadeldakse selle süsteemi lahendamist.

T. TOBIAS

OPTIMAL STOPPING RULES FOR WIENER PROCESS IN A FINITE TIME INTERVAL

The problem of finding optimal stopping rules is replaced by a free boundary problem for parabolic differential equations. The supplementary boundary condition is derived from extremal properties of the solution. The free boundary problem is deduced to a certain system of functional equations, and solving of this system is considered.