EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.2.01

УДК 517.512

*Г. КАНГРО*

# О λ-СОВЕРШЕННОСТИ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ. I

Известна важная роль, которую играет понятие совершенности в теории обычной суммируемости. В [1] введено понятие о суммируемости со скоростью $\lambda$, или короче $\lambda$-суммируемости. При изучении некоторых основных задач теории $\lambda$-суммируемости (напр., множителей суммируемости класса $(A^\lambda, B^\mu)$) возникает потребность обобщить понятие совершенности на случай $\lambda$-суммируемости. Для такого обобщения необходимо предварительно ввести топологию в множестве $c_A^\lambda$, состоящем из всех последовательностей, $\lambda$-суммируемых методом $A$. В настоящей заметке в $c_A^\lambda$ определяется локально-выпуклая топология, так наз. $FK$-топология (см. [2], с. 29), и изучаются некоторые топологические свойства множества $c_A^\lambda$, относящиеся к слабой сходимости последовательности по отрезкам. В частности, $\lambda$-консервативные методы суммирования разделяются на $\lambda$-корегулярные и $\lambda$-конулевые методы, отличающиеся друг от друга рядом основных свойств.

## § 1. Пространства $c^\lambda$ и $m^\lambda$

**1.** Пусть[1] $x = \{\xi_k\}$ — сходящаяся последовательность с $\xi = \lim \xi_k$. При $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow$ обозначим

$$c^\lambda = \{x : \exists \lim_k \beta_k\}, \quad m^\lambda = \{x : \beta_k = O(1)\},$$

где

$$\beta_k = \lambda_k (\xi_k - \xi). \tag{1}$$

При $\lambda_n = O(1)$ имеем $c^\lambda = m^\lambda = c$,

где

$$c = \{x : \exists \lim_k \xi_k\}.$$

Если над последовательностями $x = \{\xi_k\}$ и $y = \{\eta_k\}$ определить обычные линейные операции

$$x + y = \{\xi_k + \eta_k\}, \quad \alpha x = \{\alpha \xi_k\},$$

то $c^\lambda$ и $m^\lambda$ превращаются в векторные пространства.

---

[1] Свободные индексы принимают значения 0, 1, ... .

Лемма 1. *При нормировке*

$$\|x\| = \sup_k \{|\beta_k|, |\xi|\} \tag{2}$$

*пространства $c^\lambda$ и $m^\lambda$ являются BK-пространствами*[2].

Доказательство. Выполнение аксиом нормы проверяется просто. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши в пространстве $m^\lambda$, т. е.

$$\lim_{m,n} \|x_m - x_n\| = 0.$$

Обозначив

$$x_n = \{\xi_k^n\}, \quad \lim_k \xi_k^n = \xi^n, \quad \beta_k^n = \lambda_k (\xi_k^n - \xi^n), \tag{3}$$

согласно определению (2) находим

$$\lim_{m,n} |\beta_k^m - \beta_k^n| = 0, \quad \lim_{m,n} |\xi^m - \xi^n| = 0$$

равномерно относительно $k$. Отсюда вытекает существование пределов

$$\lim_n \beta_k^n = \beta_k, \quad \lim_n \xi^n = \xi \tag{4}$$

равномерно относительно $k$, а ввиду третьей формулы из (3) также существование предела

$$\lim_n \xi_k^n = \xi_k, \tag{5}$$

причем для пределов (4) и (5) справедливо соотношение (1). Поскольку

$$|\xi_k - \xi| \leqslant |\xi_k - \xi_k^n| + |\xi_k^n - \xi^n| + |\xi^n - \xi|,$$

то в силу (5) и вторых формул из (3) и (4) имеем $\xi = \lim \xi_k$.

Обозначив $x = \{\xi_k\}$, из неравенства

$$|\beta_k| \leqslant |\beta_k - \beta_k^n| + |\beta_k^n|$$

ввиду первой формулы из (4) и $x_n \in m^\lambda$ заключаем, что $x \in m^\lambda$. Согласно определению (2) имеем

$$\|x_n - x\| = \sup_k \{|\beta_k^n - \beta_k|, |\xi^n - \xi|\},$$

откуда на основе (4) получаем, что $x = \lim x_n$. Тем самым пространство $m^\lambda$ банахово и по формуле (5) является BK-пространством.

Остается показать, что пространство $c^\lambda$ замкнуто в $m^\lambda$. Пусть $x = \lim x_n$, где $x_n \in c^\lambda$. По доказанному выше $x \in c$. Сохраняя прежние обозначения, имеем

$$|\beta_k - \beta_l| \leqslant |\beta_k - \beta_k^n| + |\beta_k^n - \beta_l^n| + |\beta_l^n - \beta_l|.$$

В силу первой формулы из (4) и $\{\beta_k^n\} \in c$ при фиксированном $n$ имеем $\{\beta_k\} \in c$, т. е. $x \in c^\lambda$. Итак, $c^\lambda$ является BK-пространством.

2. Следующая лемма дает общий вид непрерывного линейного функционала, определенного на пространстве $c^\lambda$.

Лемма 2. *Функционал $f$ представляет собой непрерывный линей-*

---

[2] Банахово пространство последовательностей называется BK-пространством, если в нем имеет место покоординатная сходимость.

*ный функционал из пространства $c^\lambda$ тогда и только тогда, когда для каждого $x \in c^\lambda$ имеем* [3]

$$f(x) = d\xi + t\beta + \sum_k d_k\beta_k, \quad \sum_k |d_k| < \infty, \tag{6}$$

*где $\beta_k$ определяется формулой* (1), $\beta = \lim \beta_k$, *а $d$, $t$, $d_k$ — константы, зависящие лишь от $f$. При этом в случае $\lambda_n \neq O(1)$*

$$\|f\| = |d| + |t| + \sum_k |d_k|. \tag{7}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что последовательности $e_\nu = \{\delta_{k\nu}\}$, $e = \{\delta_{kk}\}$ и $e^\lambda = \{\lambda_k^{-1}\}$ принадлежат пространству $c^\lambda$. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \xi e + \beta e^\lambda + \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_k - \beta}{\lambda_k} e_k.$$

Из формулы (2) следует

$$\lim_n \|x - x_n\| = \lim_n \sup_{k>n} |\beta_k - \beta| = 0$$

и, стало быть,

$$x = \xi e + \beta e^\lambda + \sum_k \frac{\beta_k - \beta}{\lambda_k} e_k.$$

Отсюда для произвольного непрерывного линейного функционала $f$ из пространства $c^\lambda$ получаем

$$f(x) = d\xi + d'\beta + \sum_k d_k(\beta_k - \beta), \tag{8}$$

где

$$d = f(e), \quad d' = f(e^\lambda), \quad d_k = \lambda_k^{-1} f(e_k).$$

Подставив в (8) вместо $x$ последовательность $x_0 = \{\xi_k^0\} \in c^\lambda$, где

$$\xi_k^0 = \begin{cases} \lambda_k^{-1} \operatorname{sgn} d_k, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

с помощью неравенства $|f(x_0)| \leqslant \|f\|\|x_0\| = \|f\|$ выведем, что $\Sigma |d_k| < \infty$. Поэтому формуле (8) можно придать вид (6), где $t = d' - \Sigma d_k$.

Поскольку $|\xi| \leqslant \|x\|$, $|\beta_k| \leqslant \|x\|$, $|\beta| \leqslant \|x\|$, то для любого $f$, определенного соотношением (6), имеем

$$\|f\| \leqslant |d| + |t| + \sum_k |d_k|.$$

Но при $x = x_n = \{\xi_k^n\}$, где

$$\xi_k^n = \begin{cases} \lambda_k^{-1} \operatorname{sgn} d_k + \operatorname{sgn} d, & k \leqslant n, \\ \lambda_k^{-1} \operatorname{sgn} t + \operatorname{sgn} d, & k > n, \end{cases}$$

---

[3] Для простоты обозначаем $\sum_k = \sum_{k=0}^{\infty}$.

из (6) в случае $\lambda_n \neq O(1)$ вытекает
$$\|f\| \geqslant \lim_n |f(x_n)| = |\lim_n f(x_n)| = |d| + |t| + \sum_k |d_k|.$$

Из последних двух неравенств и следует (7).

## § 2. Поле $\lambda$-суммируемости матричного метода

**1.** Матричный метод суммирования $A = (a_{nk})$ переводит последовательность $x = \{\xi_k\}$ в последовательность $Ax = \{\eta_n\}$ с
$$\eta_n = \sum_k a_{nk}\xi_k,$$
если ряды в выражении $\eta_n$ сходятся. Введем обозначения
$$c^\lambda_A = \{x : Ax \in c^\lambda\}, \quad m^\lambda_A = \{x : Ax \in m^\lambda\},$$
где $c^\lambda_A$ будем называть *полем $\lambda$-суммируемости*, а $m^\lambda_A$ — *полем $\lambda$-ограниченности* метода $A$. Последовательность $x$ называем *$A^\lambda$-суммируемой*, если $x \in c^\lambda_A$, и *$A^\lambda$-ограниченной*, если $x \in m^\lambda_A$.

Согласно лемме 1 пространства $c^\lambda$ и $m^\lambda$ являются $BK$-пространствами. Поэтому по известным теоремам К. Целлера (см. [3], теоремы 4.10 и 4.11) $c^\lambda_A$ и $m^\lambda_A$ представляют собой $FK$-пространства [4] с полунормами
$$|\xi_n|, \quad \sup_m \left|\sum_{k=0}^m a_{nk}\xi_k\right|, \quad \sup_n \{|\gamma_n|, |\eta|\},$$
где $\eta = \lim \eta_n$, $\gamma_n = \lambda_n(\eta_n - \eta)$. При этом общий вид непрерывного линейного функционала $f$ из пространства $c^\lambda_A$ в силу леммы 2 определяется формулой
$$f(x) = d\eta + t\gamma + \sum_k d_k\gamma_k + \sum_k t_k\xi_k, \qquad \sum_k |d_k| < \infty, \tag{9}$$
где $\gamma = \lim \gamma_n$, а коэффициенты $t_k$ такие, что ряд $\Sigma\, t_k\xi_k$ сходится при всех $x \in c^\lambda_A$.

Поскольку при $\lambda_n = O(1)$ имеем $\gamma = 0$, то положив $\tau = d - \Sigma\, d_k\lambda_k$, $\tau_k = d_k\lambda_k$, из (9) находим
$$f(x) = \tau\eta + \sum_k \tau_k\eta_k + \sum_k t_k\xi_k, \quad \sum_k |\tau_k| < \infty. \tag{10}$$

Это — установленный К. Целлером общий вид непрерывного линейного функционала из пространства $c$.

Метод $A$ называем *$\lambda$-консервативным*, если $A(c^\lambda) \subset c^\lambda$. Если $\lambda_n = O(1)$, то $\lambda$-консервативность совпадает с консервативностью. Необходимые и достаточные условия для $\lambda$-консервативности метода $A$ даются следующей леммой (см. [4], лемма 1).

Лемма 3. *Метод $A = (a_{nk})$ является $\lambda$-консервативным тогда и только тогда, когда*

1° $Ae \in c^\lambda$,

2° $\sum_k \frac{|a_k|}{\lambda_k} < \infty \quad (a_k = \lim_n a_{nk})$,

[4] Полное метрическое локально-выпуклое пространство последовательностей называется $FK$-пространством, если в нем имеет место покоординатная сходимость.

3° *метод*[5] $\mathfrak{A}=(\alpha_{nk})$ с

$$\alpha_{nk}=\frac{\lambda_n(a_{nk}-a_k)}{\lambda_k} \tag{11}$$

*консервативен.*

Кроме того, для λ-консервативного метода $A$ справедлива формула

$$\lim_n \sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k}=\sum_k \frac{a_k}{\lambda_k}+r, \tag{12}$$

где

$$r=\begin{cases} 0, & \lambda_n \neq O(1), \\ \varrho(A)\lim \dfrac{1}{\lambda_n}, & \lambda_n=O(1), \end{cases}$$

а

$$\varrho(A)=a-\sum_k a_k \qquad (a=\lim_n \sum_k a_{nk})$$

является характеристикой метода $A$.

Отметим, что согласно теореме Кожима—Шура метод $\mathfrak{A}$ консервативен тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} \exists \lim_n \alpha_{nk}=\alpha_k, \\ \exists \lim_n \sum_k \alpha_{nk}=\alpha, \\ \sum_k |\alpha_{nk}|=O(1). \end{gathered} \tag{13}$$

2. Пусть $X$ — топологическое векторное пространство последовательностей с обычными линейными операциями. Последовательность

$$x_m=\sum_{k=0}^{m}\xi_k e_k=\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m, 0, 0, \ldots\}$$

называется отрезком последовательности $x=\{\xi_k\}$. Говорят, что в точке $x\in X$ имеет место слабая сходимость по отрезкам, если[6] $x_m$ слабо сходится к $x$, т. е. $\lim f(x_m)=f(x)$ для каждого непрерывного линейного функционала $f$, определенного в $X$. В дальнейшем нам нужны необходимые и достаточные условия того, чтобы в точке $x\in c_A^\lambda$ имела место слабая сходимость по отрезкам.

Теорема 1. *Если* $e_k\in c_A^\lambda$, *то в точке* $x\in c_A^\lambda$ *имеет место слабая сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда*

1° $\sum_k a_k\xi_k=\eta$,

2° $\sum_k \lambda_k \alpha_k \xi_k=\gamma$,

3° $\sum_{k=0}^{m}\lambda_k\alpha_{nk}\xi_k=O(1)$,

*где* $\alpha_{nk}$ *определяется формулой* (11), $\alpha_k$ *определяется первым из условий* (13) *и* $a_k$ — *условием* 2° *леммы* 3.

---

[5] Метод $\mathfrak{A}$ определяется матрицей $(\alpha_{nk})$ с помощью преобразования последовательности в последовательность.

[6] Предполагается, что $x_m\in X$.

Доказательство. Покоординатная сходимость в $c_A^\lambda$ означает, что $\xi_k = \xi_k(x)$ — непрерывный линейный функционал в $c_A^\lambda$. Отсюда вытекает, что $\eta = \eta(x)$, $\gamma_k = \gamma_k(x)$, $\gamma = \gamma(x)$ — также непрерывные линейные функционалы в $c_A^\lambda$. Из (9) заключаем, что соотношение $\lim f(x_m) = f(x)$ справедливо для каждого непрерывного линейного функционала $f$ из $c_A^\lambda$ тогда и только тогда, когда [7]

$$\lim_m \eta(x_m) = \eta, \qquad \lim_m \gamma(x_m) = \gamma, \tag{14}$$
$$\lim_m \sum_k \gamma_k(x_m) d_k = \sum_k \gamma_k d_k \quad (\forall \{d_k\} \in l).$$

Согласно теореме Хана (см., напр., [5], с. 21) последнее соотношение имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_m \gamma_k(x_m) = \gamma_k,$$
$$\gamma_k(x_m) = O(1). \tag{15}$$

Из $e_k \in c_A^\lambda$ вытекает существование пределов

$$a_k = \lim_n a_{nk}, \qquad \alpha_k = \lim_n \alpha_{nk}.$$

Поэтому, имея в виду формулу (11), находим

$$\eta(x_m) = \lim_n \sum_{k=0}^{m} a_{nk}\xi_k = \sum_{k=0}^{m} a_k\xi_k,$$

$$\gamma_n(x_m) = \lambda_n \sum_{k=0}^{m} (a_{nk} - a_k)\xi_k = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \alpha_{nk}\xi_k,$$

$$\gamma(x_m) = \lim_n \gamma_n(x_m) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \alpha_k \xi_k.$$

Отсюда явствует, что условия (14) и второе из условий (15) — это соответственно условия 1°—3° теоремы. Первое же условие (15) следует из условия 1° теоремы, поскольку

$$\lim_m \gamma_n(x_m) = \lambda_n \sum_k (a_{nk} - a_k)\xi_k = \lambda_n(\eta_n - \eta) = \gamma_n.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим в пространстве $c^\lambda$ подпространство

$$n^\lambda = \{x \in c^\lambda : \xi(x) = \beta(x) = 0\}.$$

Если $A$ является методом сходимости, то $a_{nk} = \alpha_{nk} = \delta_{nk}$ и из теоремы 1 получается

Следствие 1. *В точке $x \in c^\lambda$ имеет место слабая сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда $x \in n^\lambda$.*

В поле $\lambda$-суммируемости $c_A^\lambda$ рассмотрим подполе

$$n_A^\lambda = \{x \in c_A^\lambda : \eta(x) = \gamma(x) = 0\}.$$

Если $a_k = \alpha_k = 0$, то $e_k \in n_A^\lambda$ и из теоремы 1 вытекает

---

[7] Здесь $l$ означает пространство абсолютно сходящихся рядов.

Следствие 2. *Если $a_k = \alpha_k = 0$, то в точке $x \in n^\lambda_A$ имеет место слабая сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{m} a_{nk}\xi_k = O(1).$$

При $\lambda_n = O(1)$ из следствия 2 получается известная теорема Целлера (см. [6], теорема 3.6).

Если метод взвешенных средних Риса $A = (R,\ p_n)$ удовлетворяет условию $\lim P_n^{-1} = 0$, где $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n$, и является λ-консервативным, то $a_k = \alpha_k = 0$ (см. [7], лемма 1). Для $x = \{\xi_k\} \in n^\lambda_A$ имеем

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{m} a_{nk}\xi_k = \frac{\lambda_n}{P_n}\frac{P_m}{\lambda_m}\gamma_m = O(1) \qquad (m \leqslant n),$$

ибо множитель перед $\gamma_m$ ограничен (см. [7], лемма 1). Согласно следствию 2 в точке $x \in n^\lambda_A$ имеет место слабая сходимость по отрезкам.

Оказывается, что при изучении общих свойств λ-консервативного метода $A$ часто важно знать, имеет ли в точке $e^\lambda \in c^\lambda_A$ место слабая сходимость по отрезкам или нет. Согласно лемме 3 в случае λ-консервативного метода $A$ метод $\mathfrak{A} = (\alpha_{nk})$ консервативен и, стало быть, условие 3° теоремы 1 ввиду третьего условия из (13) при $x = e^\lambda$ выполнено. Условия же 1° и 2° теоремы 1 в силу формулы (12) в случае $x = e^\lambda$ принимают вид

$$r = 0, \tag{16}$$

$$\varrho(\mathfrak{A}) = 0, \tag{17}$$

где

$$\varrho(\mathfrak{A}) = \alpha - \sum_k \alpha_k$$

представляет собой характеристику метода $\mathfrak{A}$. При $\lambda_n \neq O(1)$ условие (16) выполнено, а при $\lambda_n = O(1)$ оно вытекает из (17), ибо тогда $\alpha_k = 0$, $\alpha = \varrho(A)$ и, следовательно, $\varrho(\mathfrak{A}) = \varrho(A)$. Тем самым из теоремы 1 получается

Следствие 3. *Если метод $A$ является λ-консервативным, то в точке $e^\lambda \in c^\lambda_A$ имеет место слабая сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда $\varrho(\mathfrak{A}) = 0$.*

При $\lambda_n = O(1)$ следствие 3 доказано Э. Юримяэ [8].

**3.** Разделим все λ-консервативные методы на два класса.

Определение 1. Заданный λ-консервативный метод $A$ называем *λ-конулевым* или *λ-корегулярным* смотря по тому, имеет ли место в точке $e^\lambda \in c^\lambda_A$ слабая сходимость по отрезкам или нет.

Согласно следствию 3 λ-консервативный метод $A$ является λ-конулевым, если $\varrho(\mathfrak{A}) = 0$, и λ-корегулярным, если $\varrho(\mathfrak{A}) \neq 0$. Если $\lambda_n = O(1)$, то, как мы видели выше, $\varrho(\mathfrak{A}) = \varrho(A)$ и λ-конулевой (λ-корегулярный) метод окажется конулевым (корегулярным) в смысле А. Виланского [9].

Следующая лемма позволяет во многих случаях установить λ-корегулярность метода $A$.

Лемма 4. *Если λ-консервативный треугольный метод $A$ удовлетворяет условиям*

$$a_{nk} \geqslant 0, \quad a > 0, \quad a_k = \alpha_k = 0,$$

*то $A$ является λ-корегулярным.*

Доказательство. Поскольку $A$ треуголен и $\alpha_k = 0$, то в силу $\lambda_n \uparrow$ и $a_{nk} \geqslant 0$ имеем

$$\alpha = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_n a_{nk}}{\lambda_k} \geqslant \lim_n \sum_{k=0}^{n} a_{nk} = a$$

и ввиду условий $\alpha_k = 0$, $a > 0$

$$\varrho(\mathfrak{A}) = \alpha > 0.$$

Рассмотрим некоторые примеры применения леммы 4.

Пример 1. *Метод Риса* $(R, p_n)$ *с* $p_n \geqslant 0$ *и* $\lim P_n^{-1} = 0$ *является* $\lambda$*-корегулярным, если он* $\lambda$*-консервативен, т. е. если*

$$\exists \lim_n \frac{\lambda_n}{P_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k}$$

(см. [7], лемма 1).

Пример 2. *Метод Чезаро* $(C, \alpha)$ *с* $\alpha > 0$ *является* $\lambda$*-корегулярным, если он* $\lambda$*-консервативен, т. е. если*

$$\exists \lim_n \frac{\lambda_n}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{\lambda_k}$$

(см. [7], лемма 2).

Пример 3. *Метод Эйлера—Кноппа*[8] $(E, q)$ *с* $q > 0$ *является* $\lambda$*-корегулярным, если он* $\lambda$*-консервативен, т. е. если*

$$\exists \lim_n \frac{\lambda_n}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{q^{n-k}}{\lambda_k}. \tag{18}$$

Покажем, что $\alpha_k = 0$. Из (18) находим

$$\lambda_n \left(\frac{q}{q+1}\right)^n = O(1),$$

откуда

$$\frac{1}{\lambda_n} \geqslant m \left(\frac{q}{q+1}\right)^n,$$

где $m > 0$ — некоторая константа. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{q^{n-k}}{\lambda_k} \geqslant m q^n \left(1 + \frac{1}{q+1}\right)^n,$$

вследствие чего из (18) следует

$$\lambda_n \left(\frac{q}{q+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{q+1}\right)^n = O(1)$$

и, стало быть, при фиксированном $k$

$$\lambda_n \left(\frac{q}{q+1}\right)^n \binom{n}{k} = o(1),$$

откуда $\alpha_k = 0$.

---

[8] См., напр., [5], с. 117.

В дополнение к примеру 1 покажем, что λ-консервативный метод Риса $A = (R, p_n)$ с $p_n \geqslant 0$ является λ-конулевым, если $\delta = \lim P_n^{-1} \neq 0$. Действительно, обозначая

$$\delta' = \lim_n \lambda_n (P_n^{-1} - \delta),$$

в силу $a_k = \delta p_k, \lambda_n \uparrow$ и $\Sigma p_k < \infty$ находим

$$\alpha_k = \lim_n \lambda_n \frac{a_{nk} - a_k}{\lambda_k} = \delta' \frac{p_k}{\lambda_k},$$

$$\alpha = \lim_n \lambda_n \sum_k \frac{a_{nk} - a_k}{\lambda_k} =$$

$$= \lim_n \lambda_n \left[ (P_n^{-1} - \delta) \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k} - \delta \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_k}{\lambda_k} \right] = \delta' \sum_k \frac{p_k}{\lambda_k}.$$

Тем самым $\varrho(\mathfrak{A}) = 0$.

Примечание. Основные свойства корегулярных и конулевых методов суммирования обобщаются и на λ-корегулярные и λ-конулевые методы. Например, если λ-консервативные методы $A$ и $B$ удовлетворяют условию $c_A^\lambda \subset c_B^\lambda$, то имеет место соотношение

$$\varrho(\mathfrak{B}) = \varkappa \varrho(\mathfrak{A}), \tag{19}$$

где $\mathfrak{B}$ получается из $B$ аналогично тому, как $\mathfrak{A}$ из $A$ по закону (11), а $\varkappa$ — некоторое число.

Действительно, для произвольного непрерывного линейного функционала $f$, определенного на $c_A^\lambda$, ввиду формул (9) и (12) находим

$$f(e^\lambda - e_m^\lambda) = d\left( \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} + r \right) + t\left( \alpha - \sum_{k=0}^{m} \alpha_k - \lim_n r\lambda_n \right) +$$

$$+ \sum_k t_k \left( \sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_{k\nu} - r\lambda_k \right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{t_k}{\lambda_k},$$

откуда в силу третьего условия из (13)

$$\lim_m f(e^\lambda - e_m^\lambda) = dr + t[\varrho(\mathfrak{A}) - \lim_n r\lambda_n] - \sum_k r t_k \lambda_k.$$

Поскольку при $\lambda_n = O(1)$ имеем $\varrho(\mathfrak{A}) = \varrho(A)$, то окончательно получаем

$$\lim_m f(e^\lambda - e_m^\lambda) = \varkappa \varrho(\mathfrak{A}), \tag{20}$$

где

$$\varkappa = \begin{cases} t, & \lambda_n \neq O(1), \\ \tau, & \lambda_n = O(1), \end{cases}$$

а $\tau$ — коэффициент при $\eta$ в формуле (10). Рассмотрим на $c_B^\lambda$ функционал

$$g(x) = \zeta + \lim_n \lambda_n (\zeta_n - \zeta),$$

где

$$\zeta_n = \sum_k b_{nk} \xi_k, \quad \zeta = \lim_n \zeta_n.$$

Согласно формуле (20) имеем

$$\lim_m g(e^\lambda - e^\lambda_m) = \varrho(\mathfrak{B}).$$

Но так как $c^\lambda_A \subset c^\lambda_B$, то $g$ — непрерывный линейный функционал также на $c^\lambda_A$, и формула (20) дает

$$\lim_m g(e^\lambda - e^\lambda_m) = \varkappa\varrho(\mathfrak{A})$$

при некотором $\varkappa$. Из последних двух формул и вытекает (19).

В случае $\lambda_n = O(1)$ формулу (20) доказали А. Виланский [9] для нормального консервативного и К. Целлер [3] для любого консервативного метода $A$. Отметим, что из формулы (20) непосредственно вытекает следствие 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кангро Г., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 137 (1969).
2. Zeller K., Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin, 1958.
3. Zeller K., Math. Z., **53**, 463 (1951).
4. Кангро Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **277** (в печати).
5. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
6. Zeller K., Math. Z., **55**, 61 (1951).
7. Кангро Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **277** (в печати).
8. Юримяэ Э. И., Изв. АН ЭССР, Сер. техн. и физ.-матем. н., **8**, 115 (1959).
9. Wilansky A., Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 59 (1949).

*Тартуский государственный университет*

Поступила в редакцию
16/VII 1970

*G. KANGRO*

**SUMMEERIMISMENETLUSTE λ-PERFEKTSUSEST JA SELLE RAKENDUSTEST. I**

Perfektsete menetluste tähtsus summeeruvuse teoorias on hästi teada. Töös [1] on esitatud λ-summeeruvuse mõiste. Et laiendada perfektsuse mõistet λ-summeeruvusele, defineeritakse käesolevas töös menetluse $A$ abil λ-summeeruvate jadade vektorruumis $c^\lambda_A$ teatav lokaalselt kumer topoloogia (nn. $FK$-topoloogia). Uuritakse ruumi $c^\lambda_A$ mõningaid põhilisi topoloogilisi omadusi, mis on seotud nõrga lõikekoonduvusega.

*G. KANGRO*

**ON λ-PERFECTICITY OF SUMMABILITY METHODS AND ITS APPLICATIONS. I**

The importance of perfect methods in the theory of summability is wellknown. In [1] the notion of λ-summability was introduced. In order to generalize the notion of perfecticity to λ-summability, in the present paper a locally convex topology (so-called $FK$-topology) is defined in the vector space $c^\lambda_A$ of sequences, λ-summables by the method $A$. Some fundamental topological properties of $c^\lambda_A$ in connexion with the weak convergence by sections are studied.