EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.2.17

С. УЛЬМ

О ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОМ УПРАВЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

S. ULM. DÜNAAMILISE SÜSTEEMI DETSENTRALISEERITUD JUHTIMISEST

S. ULM. ON DECENTRALIZED CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEM

Пусть X и U — прямые произведения гильбертовых пространств: $X=X_1\times\ldots\times X_n$; $U=U_1\times\ldots\times U_n$. Рассмотрим проблему: минимизировать (максимизировать) функционал

$$f(x,u)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i,u_i) \tag{1}$$

при условии, что

$$x=l+Lu+Mx. \tag{2}$$

При этом

$$x=(x_1,\ldots,x_n)\in X;\quad u=(u_1,\ldots,u_n)\in U;$$
$$l=(l_1,\ \ldots,\ l_n)\in X;\ L=(L_{ij})_{i,j=1,\ldots,n};\ L_{ij}\in[U_j\to X_i];$$
$$M=(M_{ij})_{i,j=1,\ldots,n};\quad M_{ij}\in[X_j\to X_i].$$

Через M^*_{ij}, L^*_{ij} обозначим операторы сопряженные M_{ij} и L_{ij}. Необходимые условия экстремума для задачи (1)—(2) выражаются по теореме Люстерника [1] в виде:

$$\left\{\begin{aligned} &f'_{ix_i}-\lambda_i+\sum_{j=1}^{n}M^*_{ji}\lambda_j=0\\ &f'_{iu_i}+\sum_{j=1}^{n}L^*_{ji}\lambda_j=0\\ &x_i=l_i+\sum_{j=1}^{n}L_{ij}u_j+\sum_{j=1}^{n}M_{ij}x_j,\end{aligned}\right. \tag{3}$$

где f'_{ix_i}, f'_{iu_i} являются «частными» градиентами функционала f_i по x_i и u_i; $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$; $\lambda_i\in X^*_i$.

Условие правильности [1] выполнено, если уравнение

$$(I-M)x-Lu=g \tag{4}$$

имеет решение (относительно $x\in X$, $u\in U$) при любом $g\in X$; I — единичный оператор.

Поскольку f'_{ix_i} и f'_{iu_i} являются только функциями от x_i, u_i, то возможно решить систему (3) децентрализованно. Допустим, что из систем уравнений

$$\begin{cases} f'_{ix_i} - \lambda_i + \sum\limits_{j=1}^{n} M^*_{ji}\lambda_j = 0 \\ f'_{iu_i} + \sum\limits_{j=1}^{n} L^*_{ji}\lambda_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{5}$$

можно при каждом интересующем нас значении λ найти единственные решения $x_i = x_i(\lambda)$ и $u_i = u_i(\lambda)$ (задачи подсистем на первом уровне).

Координация для определения оптимального λ (задача управления на втором уровне) проводится при помощи итеративного решения системы уравнений

$$x_i(\lambda) = l_i + \sum_{j=1}^{n} L_{ij}u_j(\lambda) + \sum_{j=1}^{n} M_{ij}x_j(\lambda) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления: минимизировать (максимизировать) функционал *

$$f(x, u) = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i, u_i, t)\, dt \tag{7}$$

при условиях

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (A_{ij}(t)x_j + B_{ij}(t)u_j) \\ x_i(0) = x_{i0} \quad (i = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{8}$$

Допустим, что $A_{ij}(t)$ — непрерывные по t матрицы; элементы $B_{ij}(t)$ — интегрируемые с квадратом функции; функции φ_i обладают нужными дифференциальными свойствами. Рассмотрим однородные системы

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}x_i \\ x_i(0) = x_{i0} \quad (i = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{9}$$

Обозначим соответствующие этим системам фундаментальные матрицы через V_i. Поскольку предполагается небольшая размерность систем (9), то построение V_i не представляет трудностей.

Уравнение (8) можно теперь представить в виде:

$$x_i(t) = V_i(t)x_{i0} + V_i(t)\int_0^t [V_i(s)]^{-1}[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} A_{ij}(s)x_j(s)\,ds + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(s)u_j(s)]ds. \tag{10}$$

Введем обозначения:

$$l_i = V_i(t)x_{i0}; \tag{11}$$

$$\begin{cases} M_{ij}x_j = V_i(t)\int_0^t [V_i(s)]^{-1}A_{ij}(s)x_j(s)\,ds \quad (i \neq j), \\ M_{ii} = 0; \end{cases} \tag{12}$$

* Отметим, что в общем x_i, u_i могут быть векторами.

$$L_{ij}u_j = V_i(t)\int\limits_0^t [V_i(s)]^{-1}B_{ij}(s)u_j(s)ds; \tag{13}$$

$$f_i(x_i, u_i) = \int\limits_0^T \varphi_i(x_i, u_i, t)dt. \tag{14}$$

Решения задачи (7)—(8) ищем в классе вектор-функций интегрируемых с квадратом на отрезке $[0, T]$. Используя обозначения (11)—(14) можно задачу (7)—(8) формулировать в операторном виде (1)—(2).

Поскольку

$$M^*_{ij}y_j = A^*_{ij}(t)[V_i(t)]^{-1}\int\limits_t^T V^*_i(s)y_j(s)ds \quad (i \neq j) \tag{15}$$

и

$$L^*_{ij}v_j = B^*_{ij}(t)[V^*_i(t)]^{-1}\int\limits_t^T V^*_i(s)v_j(s)ds, \tag{16}$$

то необходимые условия экстремума для задачи (7)—(8) выражаются в виде (ср. (3)):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}(x_i, u_i, t) - \lambda_i(t) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n A^*_{ji}(t)[V^*_j(t)]^{-1}\int\limits_t^T V^*_j(s)\lambda_j(s)ds = 0; && (17)\\ &\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_i}(x_i, u_i, t) + \sum_{j=1}^n B^*_{ji}(t)[V^*_j(t)]^{-1}\int\limits_t^T V^*_j(s)\lambda_j(s)ds = 0; && (18)\\ &x_i(t) = l_i(t) + V_i(t)\int\limits_0^t [V_i(s)]^{-1}[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n A_{ij}(s)x_j(s) + \sum_{j=1}^n B_{ij}(s)u_j(s)]ds. && (19)\end{aligned}\right.$$

Если при каждом фиксированном $\lambda(t)$ системы (17)—(18) $(i = 1, \ldots, n)$ имеют единственное относительно x_i, u_i решение $x_i = x_i(\lambda)$, $u_i = u_i(\lambda)$, то для координации получается относительно $\lambda(t)$ система уравнений

$$x_i(\lambda(t)) = l_i(t) + V_i(t)\int\limits_0^t [V_i(s)]^{-1}[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n A_{ij}(s)x_j(\lambda(s)) +$$
$$+ \sum_{j=1}^n B_{ij}(s)u_j(\lambda(s))]ds \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{20}$$

Остановимся на вопросе о выполнении условия правильности. Уравнение (4) выражается в данном случае в виде (считая $u = 0$)

$$x_i(t) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n V_i(t)\int\limits_0^t [V_i(s)]^{-1}A_{ij}(s)x_j(s)ds + g_i(t). \tag{21}$$

Поскольку ядра $K_{ij}(t, s) = V_i(t)[V_i(s)]^{-1}A_{ij}(s)$ непрерывны, то система линейных интегральных уравнений типа Вольтерра (21) имеет при каждом g* единственное решение [2]. Итак, условие правильности выполнено и оптимальная функция $\lambda(t)$ существует.

* Здесь $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$ — интегрируемая с квадратом вектор-функция.

Замечание. Используя теорию двойственности Е. Гольштейна в банаховых пространствах [3–4] можно, по-видимому, полученные результаты распространить на задачи типа (7)—(8) с ограничениями на x_i и u_i (ср. [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Люстерник Л. Л., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М., 1965.
2. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, М., 1960.
3. Гольштейн Е. Г., ДАН, **172**, № 5 (1967).
4. Гольштейн Е. Г., Эконом. и матем. методы, **IV**, вып. 4, 597 (1968).
5. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 3 (1969).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
6/X 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 2

В. ХИЖНЯКОВ

К ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА ЯНА—ТЕЛЛЕРА

V. HIŽNJAKOV. DÜNAAMILISE JAHN-TELLERI EFEKTI TEOORIAST

V. HIZHNYAKOV. ON THE THEORY OF DYNAMICAL JAHN-TELLER EFFECT

Для разрешенных переходов в центрах люминесценции высокой симметрии возбужденные электронные состояния являются вырожденными. В таких состояниях электронная энергия зависит от координат неполносимметричных колебаний, вследствие чего не только понижается точечная симметрия центра — статический эффект Яна—Теллера (СЯТ), но и возникает существенная перестройка энергетического спектра — динамический эффект Яна—Теллера (ДЯТ).

В работе [1] был предложен полуклассический вариант теории спектров поглощения примесных центров для вырожденных состояний и было показано, что ДЯТ приводит к расщеплению максимума полос поглощения (см. также [2, 3]). Квантовая теория таких спектров развита лишь для случая слабого электрон-фононного взаимодействия [4].

В работах [5, 6] была сделана попытка построить квантовую теорию электронно-колебательных спектров для вырожденных состояний при произвольной силе электрон-фононного взаимодействия. Однако авторы [5, 6] не учли ДЯТ. Действительно, в линейном, по колебательным координатам $q_\varkappa$, приближении матрица взаимодействия $\{\langle p|A|p'\rangle\} = \sum\limits_{\varkappa} \{\langle p|A_\varkappa|p'\rangle\} q_\varkappa$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$. ДЯТ связан с учетом таких колебаний $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$, для которых матрицы $\{\langle p|A_{\varkappa_i}|p'\rangle\}$ не коммутируют. Но в [5, 6] молчаливо предполагается, что эти матрицы коммутируют.

В данной работе предлагается квантовая теория поглощения для переходов между невырожденным (A_{1g}) и трехкратно вырожденным (F_{1u}) электронными состояниями при произвольной силе электрон-фононного взаимодействия. Учитывается взаимодействие с A_{1g} и F_{2g} колебаниями (с последними связан ДЯТ, см. [1]), однако взаимодействие с E_g колебаниями, приводящими к СЯТ, считается несущественным.