EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.2.10

СИРЬЕ КЭЭВАЛЛИК

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОЙ ВОЗМОЖНОЙ МОДЕЛИ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

В работе [1] был рассмотрен процесс распространения излучения в оптически толстой изотропно рассеивающей среде со статистически распределенной плотностью поглощающего вещества. Была выведена формула для среднего значения плотности квантов в плоскопараллельной слабопоглощающей среде, где корреляционная функция $K_\rho(\xi)$ плотности поглощающего вещества ϱ на пути кванта выражалась через показательную функцию

$$K_\rho(\xi) = De^{-w\xi}. \tag{1}$$

Здесь D — дисперсия плотности поглощающего вещества и ξ — отрезок на пути кванта, который является аргументом корреляционной функции.

Среднее значение плотности $\bar{u}(x)$ квантов на глубине $x = \text{const}$ выражается следующей приближенной формулой [1]:

$$\bar{u}(x) = p^2 \int\limits_0^\infty u(x, \tau)\, e^{-\alpha r \tau} \left\{ 1 + \alpha^2 \frac{D}{w} \left[\tau - \frac{1}{w} \left(1 - e^{-w\tau}\right) \right] \right\} d\tau, \tag{2}$$

где

$$p^2 = \frac{1}{1+\alpha r} \left[1 + \frac{\alpha^2 D}{(1+\alpha r)(1+\alpha r + w)} \right];$$

$u(x, \tau)$ — распределение квантов по пробегам τ (τ измеряется в единицах длины свободного пробега кванта λ в непоглощающей среде);

x — пространственная координата, отсчитываемая от одной граничной поверхности перпендикулярно к ней и измеряемая также в единицах λ;

α — массовый коэффициент поглощения;

r — среднее значение плотности поглощающего вещества.

Формула (2) получена в предположении, что размеры неоднородностей плотности поглощающего вещества намного превышают длину волны облучающего монохроматического излучения, и что она применима только в том случае, когда дисперсия D плотности поглощающего вещества небольшая.

В настоящей статье рассмотрим одну возможную модель среды, для которой корреляционная функция $K_\rho(\xi)$ имеет вид (1).

Пусть в единице объема однородной рассеивающей среды распределено количество r некоторого поглощающего вещества. Если вещество распределено равномерно по всему единичному объему, то среда имеет однородный характер, дисперсия $D=0$ и формула (2) принимает вид

$$u(x) = p^2 \int\limits_0^\infty u(x, \tau)\, e^{-\alpha r \tau}\, d\tau,$$

где

$$p^2 = \frac{1}{1+\alpha r}.$$

Предположим теперь, что то же самое количество поглощающего вещества r распределено в единице объема неравномерно. Оно сконцентрировано в случайно расположенных областях, среднее число которых в единице объема равно N (рис. 1, *а*). Области имеют случайную форму и случайные размеры, причем средний объем одной области равен V. Внутри поглощающей области плотность вещества постоянна и равна

$$\varrho_m = \frac{r}{VN}. \qquad (3)$$

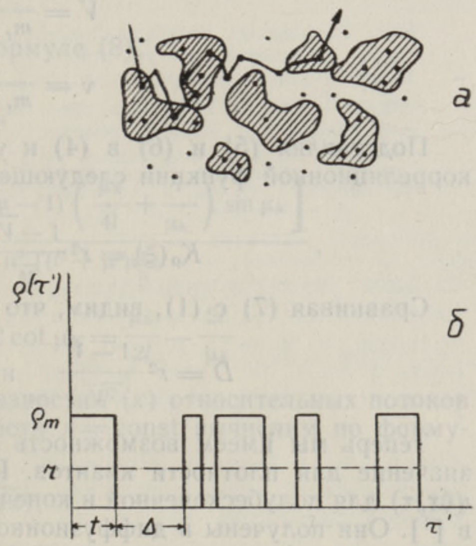

Рис. 1. Модель рассеивающей среды с неравномерным поглощением.

Световой квант в такой среде совершает столкновения с беспорядочно расположенными рассеивающими центрами и проходит в среде некоторый зигзагообразный путь длиной τ. На этом пути он находится то внутри области, где плотность поглощающего вещества равна ϱ_m, то вне ее, где поглощающее вещество отсутствует. Таким образом, изменение плотности поглощающего вещества ϱ на пути кванта τ имеет вид последовательности случайных прямоугольных импульсов одинаковой высоты ϱ_m со средним значением r (рис. 1, *б*).

Обозначим длину пути кванта внутри поглощающей области через t, а вне ее — через Δ. Пусть средними значениями для t и Δ являются соответственно m_t и m_Δ, а их плотностями вероятности — $W_1(t)$ и $W_2(\Delta)$. Последние вычислим аналогично тому, как вычисляют распределения свободных пробегов молекул [2]:

$$W_1(t) = \frac{1}{m_t} e^{-\frac{t}{m_t}}, \qquad W_2(\Delta) = \frac{1}{m_\Delta} e^{-\frac{\Delta}{m_\Delta}}.$$

Корреляционную функцию $K_\varrho(\xi)$ находим при помощи спектральной плотности функции $\varrho(\tau')$ [3].

$$K_\varrho(\xi) = \varrho_m^2 \frac{m_t m_\Delta}{(m_t+m_\Delta)^2} e^{-\frac{m_t+m_\Delta}{m_t m_\Delta}\xi}. \qquad (4)$$

Введем величины: $\overline{V}$ — относительный объем поглощающих областей в среде, ν — их среднее число на единицу длины пути кванта.

$$\overline{V} = VN, \quad \nu = NS,$$

где S — среднее значение проекции поглощающей области на поверхность, перпендикулярную к направлению движения кванта. Связь между проекцией S и объемом V установлена при помощи эффективного радиуса R поглощающей области. Это — радиус сферы, объем которой равен среднему объему V поглощающей области.

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} \quad \text{и} \quad S = \pi^{1/3}\left(\frac{3V}{4}\right)^{2/3}.$$

С другой стороны, можно считать, что

$$\overline{V} = \frac{m_t}{m_t + m_\Delta}, \tag{5}$$

$$\nu = \frac{1}{m_t + m_\Delta}. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4) и учитывая, что $r = \overline{V}\varrho_m$, получим для корреляционной функции следующее выражение:

$$K_\rho(\xi) = r^2 \frac{1-\overline{V}}{\overline{V}} e^{-\frac{\nu}{\overline{V}(1-\overline{V})}\xi}. \tag{7}$$

Сравнивая (7) с (1), видим, что

$$D = r^2 \frac{1-\overline{V}}{\overline{V}} \quad \text{и} \quad w = \frac{\nu}{\overline{V}(1-\overline{V})}.$$

Теперь мы имеем возможность по формуле (2) вычислить среднее значение для плотности квантов. Распределения квантов по пробегам $u(x,\tau)$ для полубесконечной и конечной плоскопараллельной среды даны в [1]. Они получены в диффузионном приближении при условии, что на границу $x=0$ под углом $\arccos\mu$ падает пучок параллельных лучей с плотностью потока равной единице.

В полубесконечной среде средняя плотность квантов выражается следующим образом:

$$\bar{u}(x) = \left(1 - \frac{\alpha^2 r^2}{Lw}\right)\frac{2p^2}{\lambda(1-4\mu^2\alpha r)(1+\sqrt{\alpha r})}\left[(1+2\mu)e^{-2x\sqrt{\alpha r}} - 2\mu(1+\sqrt{\alpha r})e^{-\frac{x}{\mu}}\right] +$$
$$+\frac{\alpha^2 r^2}{Lw}\frac{2p^2}{\lambda[1-4\mu^2(\alpha r+w)](1+\sqrt{\alpha r+w})}\Big[(1+2\mu)e^{-2x\sqrt{\alpha r+w}} -$$
$$-2\mu\left(1+\sqrt{\alpha r+w}\right)e^{-\frac{x}{\mu}}\Big] + \frac{\alpha^2 r^2}{L}\frac{16p^2\mu^3}{\lambda(1-4\mu^2\alpha r)^2}e^{-\frac{x}{\mu}} +$$
$$+\frac{\alpha r\sqrt{\alpha r}}{L}\frac{2p^2(1+2\mu)}{\lambda(1-4\mu^2\alpha r)(1+\sqrt{\alpha r})}xe^{-2x\sqrt{\alpha r}} +$$
$$+\frac{\alpha r\sqrt{\alpha r}}{L}\frac{p^2(1+2\mu)[1-4\mu^2\sqrt{\alpha r}(2+3\sqrt{\alpha r})]}{\lambda(1-4\mu^2\alpha r)^2(1+\sqrt{\alpha r})^2}e^{-2x\sqrt{\alpha r}}. \tag{8}$$

Здесь

$$L = \frac{\nu}{(1-\overline{V})^2},$$

$$p^2 = \frac{1}{1+ar}\left[1 + \frac{w}{L}\frac{a^2r^2}{(1+ar)(1+ar+w)}\right].$$

При получении формулы (8) для коэффициента диффузии принимали значение $D_0 = \frac{\lambda v}{4}$, где v — скорость света.

В среде конечной толщины l средняя плотность квантов вычисляется по формуле

$$\bar{u}(x) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) \frac{1}{\mu_k^2 + 4l^2ar}\left[1 + \frac{16wa^2r^2l^4}{L(\mu_k^2 + 4l^2ar + 4l^2w)(\mu_k^2 + 4l^2ar)}\right], \qquad (9)$$

где

p^2 имеет такой же вид, как и в формуле (8),

$$X_k(x) = \cos\frac{\mu_k x}{l} + \frac{2l}{\mu_k}\sin\frac{\mu_k x}{l},$$

$$A_k = \frac{2l\mu_k^2\left[(1+2\mu) + e^{-\frac{l}{\mu}}(2\mu-1)\left(\frac{\mu_k}{4l} + \frac{l}{\mu_k}\right)\sin\mu_k\right]}{\lambda[4l(l+1) + \mu_k^2](l^2 + \mu^2\mu_k^2)},$$

μ_k являются корнями уравнения $2\cot\mu_k = \frac{\mu_k}{2l} - \frac{2l}{\mu_k}$.

Средние значения суммы $\bar{f}(x)$ и разности $\bar{F}(x)$ относительных потоков через единичную площадь на плоскости $x = \text{const}$ вычислим по формулам:

$$\bar{f}(x) = \frac{\lambda}{2}\bar{u}(x), \qquad (10)$$

$$\bar{F}(x) = -\frac{\lambda^2}{4}\frac{\partial\bar{u}(x)}{\partial(x\lambda)}. \qquad (11)$$

Альбедо $\bar{A}$ и пропускание $\bar{T}$ среды вычисляются по любой из формул (10) или (11):

$$\bar{A} = \bar{f}(0) = |\bar{F}(0)|, \qquad (12)$$

$$\bar{T} = \bar{f}(l) = \bar{F}(l). \qquad (13)$$

Полученные результаты изображены графически на рис. 2—5. При расчетах принимали $ar = 0{,}1$ и $\mu = 1$ (перпендикулярное к среде падение излучения). Единицей длины при описании всех геометрических размеров служила величина λ. Рис. 2—3 (сплошные кривые) представляют зависимость альбедо и пропускания среды от относительного объема поглощающих областей $\overline{V}$ и от их среднего числа N в единице объема.

Так как формула (2) не применима при больших дисперсиях плотности поглощающего вещества, то при $\overline{V} \to 0$ альбедо и пропускание стремятся к бесконечности. Поэтому в области малых значений $\overline{V}$ процесс распространения излучения опишем другим способом.

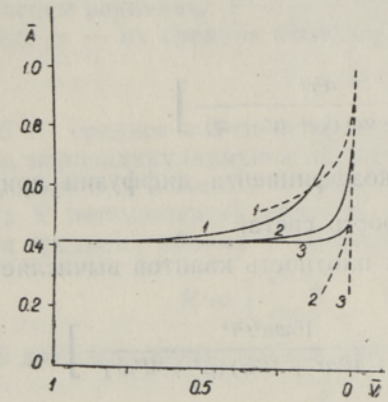

Рис. 2. Альбедо полубесконечной среды в зависимости от относительного объема поглощающих областей $\overline{V}$ при их различном среднем числе N в единице объема. Сплошные кривые представляют результаты расчетов по формуле (8), пунктирные — по (15). *1* — $N = 0{,}001$, *2* — $N = 1$, *3* — $N = 100$.

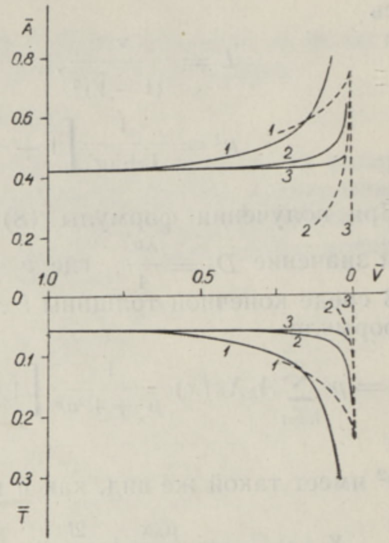

Рис. 3. Альбедо и пропускание слоя толщиной $l = 5$. Сплошные кривые — результаты расчетов по (9), пунктирные — по (16). (Обозначения см. рис. 2.)

Если размеры поглощающих областей малы, то по формуле (3) плотность поглощающего вещества внутри области ϱ_m становится очень большой, и области можно считать абсолютно черными. Тогда вероятность P того, что квант прошел в среде путь длиной τ без поглощения, вычисляется по формуле Пуассона

$$P = e^{-\nu\tau}.$$

Плотность квантов в среде на глубине $x = \mathrm{const}$ выражается следующей формулой [4]:

$$u(x) = p^2 \int_0^\infty u(x, \tau)\, e^{-\nu\tau}\, d\tau, \tag{14}$$

где

$$p^2 = \frac{1}{1+\nu}.$$

Для полубесконечной среды вычисление данного интеграла дает выражение

$$u(x) = \frac{2p^2}{\lambda(1-4\mu^2\nu)(1+\sqrt{\nu})}\left[(1+2\mu)\, e^{-2x\sqrt{\nu}} - 2\mu(1+\sqrt{\nu})\, e^{-\frac{x}{\mu}}\right], \tag{15}$$

а для среды с конечной толщиной l — оно следующее:

$$u(x) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x)\, \frac{4l^2}{\mu_k^2 + 4l^2\nu}. \tag{16}$$

Пунктирные кривые на рис. 2—3 представляют результаты расчетов, выполненных по формулам (15)—(16) и (12)—(13). Так как формулы (15)—(16) применимы только в случае, если поглощающие области

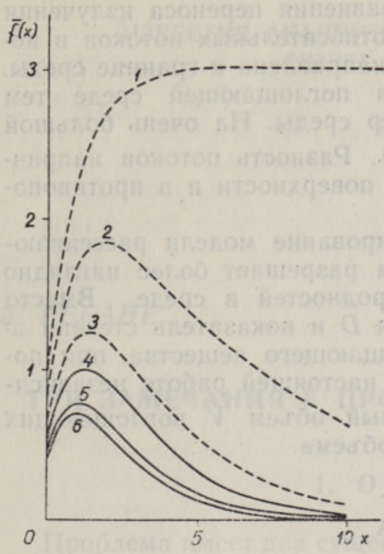

Рис. 4. Сумма относительных потоков в зависимости от глубины в полубесконечной среде.

Сплошные кривые — результаты расчетов по (8), пунктирные — по (15). $N = 0{,}001$; 1 — $\overline{V} = 0$; 2 — $\overline{V} = 0{,}01$; 3 — $\overline{V} = 0{,}1$; 4 — $\overline{V} = 0{,}2$; 5 — $\overline{V} = 0{,}5$; 6 — $\overline{V} = 1$.

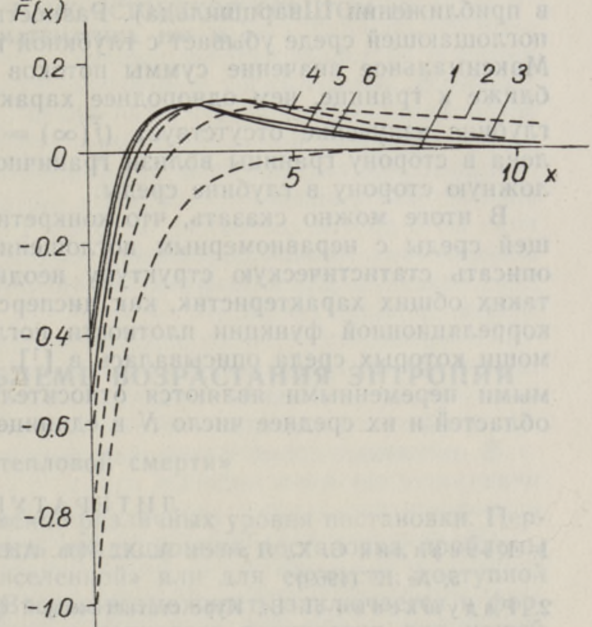

Рис. 5. Разность относительных потоков в зависимости от глубины в полубесконечной среде. (Обозначения см. рис. 4.)

можно считать абсолютно черными, то они дают неверные результаты при больших значениях $\overline{V}$. Действительный ход зависимости $\overline{A}$ и $\overline{T}$ от относительного объема $\overline{V}$ можно найти интерполированием.

Полученные графики показывают увеличение альбедо и пропускания среды при появлении неоднородностей, несмотря на то, что общее количество поглощающего вещества в единице объема не изменяется. Действительно, если $\overline{V} = 1$, то поглощающее вещество заполняет равномерно все пространство, и мы имеем дело с однородной мутной средой, коэффициент поглощения которой равен αr. При $\overline{V} = 1$ альбедо и пропускание среды имеют минимальные значения. Процессу уменьшения $\overline{V}$ от 1 до 0 соответствует концентрирование поглощающего вещества в случайные области и уменьшение размеров последних до бесконечно малых значений. При $\overline{V} = 0$ поглощение в среде отсутствует и $\overline{A}$ и $\overline{T}$ имеют максимальные значения. Существенное влияние оказывает статистическая структура среды. При данном значении относительного объема $\overline{V}$ выходящий из среды поток тем больше, чем меньше среднее число областей в единице объема. Если плотность поглощающих областей велика, то при том же самом значении $\overline{V}$ области должны иметь малые размеры и среда приобретает квазиоднородный характер.

На рис. 4—5 изображены зависимости суммы и разности относительных потоков излучения от глубины в среде. Сплошные кривые вычислены по формулам (8), (10) и (11), пунктирные — по формулам (15), (10) и (11). Сумма потоков в глубине непоглощающей полубесконечной среды ($\overline{V} = 0$) при перпендикулярном падении излучения на поверхность среды приближается к постоянному значению $\overline{f}(\infty) = 3$. (Такой же результат вытекает из решения уравнения переноса излучения в приближении Шварцшильда). Разность относительных потоков в непоглощающей среде убывает с глубиной и направлена к границе среды. Максимальное значение суммы потоков в поглощающей среде тем ближе к границе, чем однороднее характер среды. На очень большой глубине излучение отсутствует ($\bar{f}(\infty)=0$). Разность потоков направлена в сторону границы вблизи граничной поверхности и в противоположную сторону в глубине среды.

В итоге можно сказать, что конкретизирование модели рассеивающей среды с неравномерным поглощением разрешает более наглядно описать статистическую структуру неоднородностей в среде. Вместо таких общих характеристик, как дисперсия D и показатель степени w корреляционной функции плотности поглощающего вещества, при помощи которых среда описывалась в [1], в настоящей работе независимыми переменными являются относительный объем $\overline{V}$ поглощающих областей и их среднее число N в единице объема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кээваллик С. Х., Лайск А. Х., Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 5, № 12 (1969).
2. Радушкевич Л. В., Курс статистической физики, М., 1966.
3. Тихонов В. И., Статистическая радиотехника, М., 1966.
4. Van de Hulst H. C., Irvine W. H., Mém. Soc. roy. sci. Liège, 7, 78 (1962).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
23/VI 1969

SIRJE KEEVALLIK

KIIRGUSE LEVIMINE EBAÜHTLASE NEELDUMISEGA HAJUTAVA KESKKONNA ÜHES VÕIMALIKUS MUDELIS

Vaadeldakse kiirguse levimist ühtlaselt hajutavas keskkonnas, kus neelav aine on koondatud juhuslikult paigutatud juhusliku kuju ja suurusega piirkondadesse. Uuritakse keskkonna optiliste omaduste sõltuvust neelavate piirkondade keskmisest suurusest ja arvust, kusjuures neelava aine keskmine tihedus keskkonnas jääb muutumatuks. Tulemused on saadud difusioonilähenduses tasaparalleelse, ühelt poolt paralleelse kimbuga valgustatava kihi kohta.

SIRJE KEEVALLIK

RADIATIVE TRANSFER IN A MODEL OF A SCATTERING MEDIUM WITH INHOMOGENEOUS ABSORPTION

The radiation transfer process is studied in a turbid medium, where the absorbing matter is concentrated in statistically situated regions of random shape and size. The dependence of optical characteristics of the medium on the mean size and number of absorbing regions is described, if the mean density of absorbing matter remains constant. The results are obtained in diffusion approximation for a plane-parallel layer that is illuminated by parallel monochromatic radiation.