EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.2.06

Э. ЛЕЛУМЭЭС

ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПОМОЩИ СКОЛЬЗЯЩИХ ФИЛЬТРОВ

Часто физические процессы представляют собой результат взаимодействия большого числа составляющих, среди которых имеются периодические составляющие или составляющие, которые можно аппроксимировать периодическими компонентами. При исследовании таких процессов возникает необходимость выделения составляющих, лежащих в заданных частотных диапазонах. Это является задачей фильтрации. В данной работе рассматривается фильтрация низкочастотных компонентов при помощи скользящих фильтров. Идеальная фильтрация, при которой низкочастотные составляющие должны проходить через фильтр без всякого ослабления, а амплитуды высокочастотных составляющих должны обращаться в нуль, не реализуема при реальных конечных процессах. На практике обычно используют квазиоптимальные фильтры, которые легко реализуются, но в той или другой мере уступают оптимальным фильтрам. Ниже исследуется метод сопряженных градиентов для определения квазиоптимальных фильтров, которые легко реализуются на ЭЦВМ и в смысле близости к идеальному фильтру имеют некоторое преимущество по сравнению с обычно применяемыми квазиоптимальными фильтрами.

Линейная фильтрация случайной функции $x(t)$ аналитически представляется с помощью преобразования вида [1,2]:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')x(t')\,dt', \tag{1}$$

где $h(t)$ — весовая функция или ядро фильтрации.

Спектральные характеристики входа и выхода фильтра определяются как преобразования Фурье от функции $x(t)$ и $y(t)$.

Уравнение (1) для спектральных характеристик $Y(\omega)$ и $X(\omega)$ принимает вид [1]

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega), \tag{2}$$

где

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Функцию $H(\omega)$ назовем спектральной характеристикой ядра фильтрации или просто спектральной характеристикой фильтра.

Из формулы (2) видно, что спектральная характеристика идеального фильтра для выделения частот $\omega<\omega_0$ должна иметь вид

$$H_1(\omega)=\begin{cases}1 & \text{при } |\omega|\leqslant\omega_0,\\ 0 & \text{при } |\omega|>\omega_0,\end{cases} \tag{3}$$

где ω_0 — предельная частота между низко- и высокочастотными компонентами.

Соответствующая весовая функция $h_1(t)$ будет

$$h_1(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}. \tag{4}$$

Однако фильтрация весовой функцией $h_1(t)$ при конечных процессах практически не реализуема, так как $h_1(t)$ медленно затухает. Поэтому задача фильтрации сводится к определению оптимальных в некотором смысле фильтров. Исходя из уравнения (2) и следуя теории оптимальной фильтрации, основы которой были заложены Н. Винером [3], разработаны И. В. Ли [2], В. Пугачевым [4] и др., условие оптимальности можно поставить в виде

$$\Phi_m = \min_{h(t)} \Phi[h(t)],$$

где

$$\Phi[h(t)] = \int_0^{+\infty} \left[H_1(\omega) X(\omega) - X(\omega) \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} h(t) e^{-i\omega t} dt \right]^2 d\omega =$$

$$= \int_0^{+\infty} X^2(\omega) \left[H_1(\omega) - \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} h(t) e^{-i\omega t} dt \right]^2 d\omega$$

и $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Отсюда видно, что определение оптимальной весовой функции возможно лишь при условии, когда истинная спектральная характеристика самого процесса $X(\omega)$ известна.

Рассмотрим более простую задачу. Обходя спектральную характеристику самого процесса $X(\omega)$ и обозначая

$$\psi[h(t)] = \int_0^{+\infty} \left[H_1(\omega) - \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} h(t) e^{-i\omega t} dt \right]^2 d\omega, \tag{5}$$

отыщем весовую функцию $h^*(t)$, которая минимизирует функционал (5). Функция $h^*(t)$ является в определенном смысле квазиоптимальной. Ниже рассмотрим численный метод для нахождения $h^*(t)$.

Известен целый ряд квазиоптимальных весовых функций, которые вместе с соответствующими спектральными характеристиками описываются аналитически. Притом их достоинством является простота выражений весовых функций и в той или иной мере хорошие свойства спектральных характеристик. Приведем наиболее известные из них.

1. Фильтр Бартлета (равновесное среднее):

$$h_2(t) = \begin{cases} \frac{2}{T_0} & \text{при} \quad |t| \leqslant \frac{T_0}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad |t| > \frac{T_0}{2}, \end{cases} \tag{6}$$

$$H_2(\omega) = \frac{2\omega_0}{\pi\omega} \sin \omega \frac{\pi}{\omega_0}.$$

2. Фильтр Бартлета (треугольный):

$$h_3(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{T_0}-\dfrac{4|t|}{T_0^2} & \text{при } |t|\leqslant\dfrac{T_0}{2},\\ 0 & \text{при } |t|>\dfrac{T_0}{2},\end{cases}\tag{7}$$

$$H_3(\omega)=\frac{4\omega_0^2}{\pi^2\omega^2}\sin^2\omega\frac{\pi}{2\omega_0}.$$

3. Фильтр Тьюки:

$$h_4(t)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos\omega_0 t}{T_0} & \text{при } |t|\leqslant\dfrac{T_0}{2},\\ 0 & \text{при } |t|>\dfrac{T_0}{2},\end{cases}\tag{8}$$

$$H_4(\omega)=\frac{\omega_0}{2\pi}\left[\frac{2}{\omega}\sin\frac{\pi}{\omega_0}\omega+\frac{1}{\omega-\omega_0}\sin\frac{\pi}{\omega_0}(\omega-\omega_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\omega+\omega_0}\sin\frac{\pi}{\omega_0}(\omega+\omega_0)\right].$$

4. Фильтр Парзена:

$$h_5(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{T_0}\left(1-\dfrac{24t^2}{T_0^2}+\dfrac{48|t|^3}{T_0^3}\right) & \text{при } |t|<\dfrac{T_0}{4},\\ \dfrac{4}{T_0}\left(1-\dfrac{2}{T_0}|t|\right)^3 & \text{при } \dfrac{T_0}{4}\leqslant|t|\leqslant\dfrac{T_0}{2},\\ 0 & \text{при } |t|>\dfrac{T_0}{2},\end{cases}\tag{9}$$

$$H_5(\omega)=\frac{192\omega_0^4}{\pi^4\omega^4}\sin^4\omega\frac{\pi}{4\omega_0}.$$

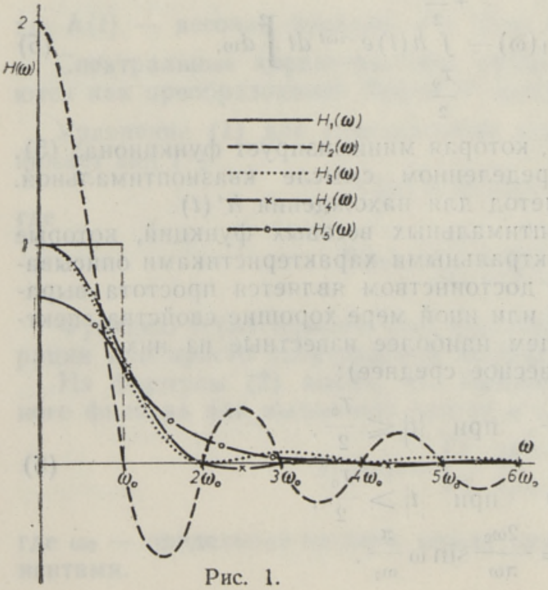

Рис. 1.

Спектральные характеристики на участке $[0; 6\omega_0]$ приведены на рис. 1.

Чтобы лучше охарактеризовать боковые лепестки и степень затухания спектральных характеристик, в табл. 1 вычислены значения величины

$$\frac{1}{\omega_0}\int\limits_{i\omega_0}^{(i+1)\omega_0} H(\omega)\,d\omega \quad \text{для}$$

$i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Таблица 1

i	$H_1(\omega)$	$H_2(\omega)$	$H_3(\omega)$	$H_4(\omega)$	$H_5(\omega)$
0	1	1,1790	0,7737	0,8152	0,6578
1	0	0,2762	0,1291	0,1975	0,2921
2	0	0,1634	0,0283	0,0164	0,0461
3	0	0,1162	0,0188	0,0053	0,0011
4	0	0,0903	0,0092	0,0024	0,0002
5	0	0,0738	0,0073	0,0013	
10	0	0,0386	0,0017	0,0002	
20	0	0,0198	0,0005		
30	0	0,0133	0,0002		
40	0	0,0100	0,0001		

Приступим теперь к минимизации функционала (5). После простых преобразований, учитывая, что $h(t)$ — четная функция, получаем

$$\psi[h(t)] = \omega_0 - 4\int_0^{\omega_0}\left[\int_0^{\frac{T_0}{2}} h(t)\cos\omega t\,dt\right]d\omega + 4\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\frac{T_0}{2}} h(t)\cos\omega t\,dt\right]^2 d\omega.$$

Обозначим

$$F[h(t)] = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\frac{T_0}{2}} h(t)\cos\omega t\,dt\right]^2 d\omega - \int_0^{\omega_0}\left[\int_0^{\frac{T_0}{2}} h(t)\cos\omega t\,dt\right]d\omega. \qquad (10)$$

Вместо минимизации функционала (5) можем отыскать минимум функционала (10). Сделаем это на ЭЦВМ при помощи метода сопряженных градиентов [5].

Выбираем интервал дискретности Δt. Весовую функцию представляем в виде временного ряда

$$h_0,\ h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_N.$$

Рассмотрим эти дискретные значения в качестве координат $(N+1)$-мерного вектора

$$\vec{h} = (h_0;\ h_1;\ \ldots;\ h_N).$$

Процесс итерации имеет следующий вид:

$$\vec{h}^{i+1} = \vec{h}^i + \alpha_i \vec{p}^{i-1},$$

где
$$\vec{p}^i = \operatorname{grad} F(\vec{h}^i) + \beta_i \vec{p}^{i-1},$$

$$\operatorname{grad} F(\vec{h}^i) = \left(\frac{\partial F(\vec{h}^i)}{\partial h^i_0};\ \frac{\partial F(\vec{h}^i)}{\partial h^i_1};\ \ldots;\ \frac{\partial F(\vec{h}^i)}{\partial h^i_N}\right),$$

$$\beta_i = \frac{\|\operatorname{grad} F(\vec{h}^i)\|^2}{\|\operatorname{grad} F(\vec{h}^{i-1})\|^2},$$

и α_i выбирается из условия минимума

$$F(\vec{h}^i + \alpha_i \vec{p}^i) = \min_{-\infty<\alpha<\infty} F(\vec{h}^i + \alpha \vec{p}^i).$$

Начальным вектором $\vec{h}^0$ выбираем вектор, построенный из треугольной весовой функции Бартлета и $\vec{p}_0 = \operatorname{grad} F(\vec{h}_0)$.

Вычисления сделаны на ЭЦВМ «Минск-22». Исследуя степень затухания знакомых по табл. 1 весовых функций, в выражении (10) бесконечный предел интегрирования заменен значением $20\omega_0$. Интегралы вычислены при помощи формул Симпсона. Для простоты изменяем масштаб времени так, чтобы всегда $T_0 = 2$. При замене интегралов суммами промежуток времени $\left[0; \frac{T_0}{2}\right]$ разбиваем на N равных частей, а промежуток частоты $[0; \omega_0]$ — на M равных частей. Значения N и M являются параметрами вычислений.

Для оценки степени минимизации вычисляем

$$\varepsilon_i = \frac{\psi(\vec{h^i})}{\omega_0}.$$

Для окончания процесса итерации принимаем критерий

$$|\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}| < 2 \cdot 10^{-5}.$$

Таблица 2 *

t	h^*_{50}	t	h^*_{50}	t	h^*_{50}	t	h^*_{50}
0	1,0110	0,26	0,8925	0,52	0,6096	0,78	0,2644
0,02	0,9974	0,28	0,8774	0,54	0,5831	0,80	0,2344
0,04	0,9939	0,30	0,8593	0,56	0,5589	0,82	0,2032
0,06	0,9939	0,32	0,8391	0,58	0,5339	0,84	0,1790
0,08	0,9917	0,34	0,8191	0,60	0,5055	0,86	0,1616
0,10	0,9849	0,36	0,8002	0,62	0,4755	0,88	0,1402
0,12	0,9755	0,38	0,7804	0,64	0,4480	0,90	0,1079
0,14	0,9666	0,40	0,7577	0,66	0,4236	0,92	0,0751
0,16	0,9585	0,42	0,7331	0,68	0,3982	0,94	0,0603
0,18	0,9490	0,44	0,7092	0,70	0,3687	0,96	0,0598
0,20	0,9364	0,46	0,6868	0,72	0,3378	0,98	0,0302
0,22	0,9215	0,48	0,6637	0,74	0,3109	1,00	−0,0304
0,24	0,9066	0,50	0,6375	0,76	0,2884		

* Значения h^*_{50} при $N = 50$ и $M = 10$.

Пример 1. Вычисления сделаны при значениях параметров $N = 50$ и $M = 10$. Значения весовой функции $h^*_{50}(t)$ при $i = 2$ и $\varepsilon_2 = 0{,}0971$ приведены в табл. 2.

График функции $H^*_{50}(\omega)$ на участке $[0; 6\omega_0]$ представлен на рис. 2.

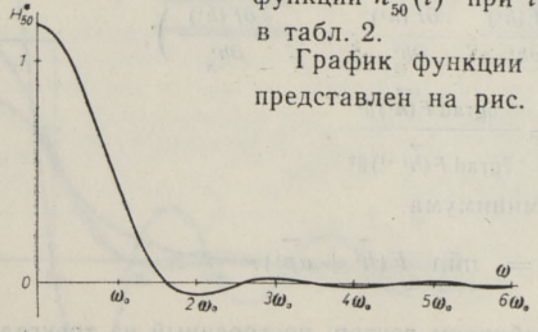

Рис. 2.

Пример 2. Вычисления сделаны при значениях параметров $N = 30$ и $M = 10$. Значения весовой функции $h^*_{30}(t)$ при $i = 2$ и $\varepsilon_2 = 0{,}0971$ приведены в табл. 3.

График функции $H^*_{30}(\omega)$ почти совпадает с графиком функции $H^*_{50}(\omega)$.

Таблица 3 *

t	h^*_{30}	t	h^*_{30}	t	h^*_{30}	t	h^*_{30}
0	1,0074	0,2667	0,8883	0,5333	0,5928	0,8000	0,2336
0,0333	0,9954	0,3000	0,8583	0,5667	0,5502	0,8333	0,1901
0,0667	0,9964	0,3333	0,8260	0,6000	0,5045	0,8667	0,1509
0,1000	0,9827	0,3667	0,7941	0,6333	0,4585	0,9000	0,1090
0,1333	0,9686	0,4000	0,7569	0,6667	0,4143	0,9333	0,0696
0,1667	0,9569	0,4333	0,7177	0,7000	0,3679	0,9667	0,0378
0,2000	0,9356	0,4667	0,6792	0,7333	0,3219	1,000	—0,0159
0,2333	0,9116	0,5000	0,6366	0,7667	0,2786		

* Значения h^*_{30} при $N=30$ и $M=10$.

Таблица 4

	h_2	h_3	h_4	h_5	h^{*}_{30}	h^{*}_{50}
ε	0,63	0,119	0,120	0,224	0,097	0,097

Приведем наконец в табл. 4 относительные среднеквадратичные отклонения (ε) спектральных характеристик известных и вычисленных квазиоптимальных весовых функций от спектральной характеристики идеальной весовой функции, а именно:

$$\varepsilon=\frac{\int\limits_0^{20\omega_0}\left[H_1(\omega)-\int\limits_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}}h(t)e^{-i\omega t}\,dt\right]^2 d\omega}{\int\limits_0^{\infty}[H_1(\omega)]^2\,d\omega}=\frac{\psi[h(t)]}{\omega_0}.$$

Автор благодарит И. Петерсена и Э. Райка за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турчин В. Ф., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7, 1270 (1967).
2. Lee Y. W., Statistical Theory of Communication, J. Wiley & Sons, 1960.
3. Wiener N., Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, J. Wiley, 1949.
4. Пугачев В. Н., Теория случайных функций, М., 1960.
5. Fletcher R., Reeves C. M., Computer Journal, 7, 149 (1964).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
30/V 1969

E. LELUMEES

JUHUSLIKE PROTSESSIDE FILTREERIMINE LIBISEVATE FILTRITE ABIL

Madalsageduslike komponentide filtreerimisel juhuslikest protsessidest rakendatavate libisevate filtrite leidmiseks kasutatakse kaasgradientide meetodit. Näidatakse, et teatud mõttes erinevad selle meetodi abil leitud filtrid ideaalsest filtrist vähem kui seni praktikas kasutatavad kvaasioptimaalsed filtrid.

E. LELUMEES

ON FILTERING RANDOM PROCESSES BY THE USE OF MOVING FILTERS

The method of conjungate gradient is applied for the determination of filters for filtering low frequency components from random processes. It is shown that in an appropriate sense the difference between the found filters and the ideal filter is smaller than the difference between the usually applied quasi-optimal filters and the ideal filter.