EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.2.05

В. АЛАДЬЕВ

ЗАДАЧА О МАТРИЦАХ, ВОЗНИКАЮЩАЯ В ТЕОРИИ САМОВОСПРОИЗВОДЯЩИХСЯ АВТОМАТОВ

Теория автоматов приводит к некоторым интересным вопросам, которые в простейшем случае формулируются в матричных терминах. Это полностью относится и к проблеме самовоспроизведения автоматов. Предположим, что имеется бесконечная регулярная система точек решетки в E^N, каждая из которых может находиться в m различных состояниях: S_1, S_2, ..., S_m. Каждая точка решетки имеет хорошо определенную систему l соседних точек, и состояние точки в момент $T+1$ однозначно определяется состояниями всех ее соседей в момент T. Предполагая, что в момент T активным является только конечное число точек, требуется выяснить, как будет распространяться эта активность. В частном случае надо выяснить: существуют ли универсальные системы, способные породить произвольные системы состояний; существуют ли подсистемы, способные к воспроизведению, т. е. к порождению подсистем, подобных исходной.

С. Улам в [1] ставит вопрос о существовании простой универсальной и воспроизводящейся матричной системы. Положительный результат дал бы простой пример такой системы. Большой интерес представляет рассмотрение условий существования различного типа воспроизводящихся систем, так как это пролило бы свет на пределы возможностей автоматов воспроизводить самих себя.

В первом пункте настоящей статьи дается формальное определение точечных воспроизводящихся структур и рассматриваются некоторые вопросы распространения активности в них. Приводится обобщение и более четкое доказательство теоремы 1 из [4] для случая точечных структур, которое остается справедливым и для сотообразных структур. Во втором пункте рассматривается вопрос существования простой универсальной воспроизводящейся матричной системы для ограниченных точечных структур. Доказывается теорема о невозможности существования в ограниченных точечных структурах в E^2 простой универсальной воспроизводящейся матричной системы.

1. Для удобства дальнейшего изложения введем следующие определения.

Определение 1. Точечным пространством TP (N, V, S, Q_0) называется бесконечная регулярная система точек решетки V в E^N*, каждая из которых может находиться в S различных состояниях, включая особое состояние покоя Q_0.

Определение 2. Точечной структурой TS (N, V, S, Q_0, F_l) называется точечное пространство TP (N, V, S, Q_0) с введенной в него

* Не нарушая общности, для простоты будем считать решетку V в E^N N-мерно кубической.

функцией F_l, отображающей множество S произвольной точки решетки V и l ее соседей в момент $T-1$ в состояние этой точки в момент T.

Предполагается, что F_l постоянна для всего пространства $TP(N, V, S, Q_0)$. Возбуждение в $TP(N, V, S, Q_0)$ распространяется в целочисленные моменты времени $T>0$. За единицу времени возбуждение в $TP(N, V, S, Q_0)$ распространяется во всех направлениях не более чем на одну точку.

Определение 3. Состояние покоя Q_0 это такое состояние, что если какая-либо точка $TP(N, V, S, Q_0)$ и все ее соседи в момент $T-1$ находятся в состоянии Q_0, то и в момент T эта точка должна находиться в состоянии Q_0.

Определение 4. Блоком называется часть пространства $TP(N, V, S, Q_0)$, занимаемая конечным числом точек.

Определение 5. Конфигурацией KF называется функция, которая ставит в соответствие каждой точке блока определенное состояние из S.

Соседями какой-либо точки $TP(N, V, S, Q_0)$ мы будем считать те точки, в которые приходит возбуждение из этой точки за целочисленную единицу времени.

Определение 6. Конфигурация KF называется копией конфигурации KF′, если существует движение пространства $TP(N, V, S, Q_0)$, переводящее блок KF в блок KF′ так, что каждая точка блока KF имеет то же состояние, что и соответствующая ей точка блока KF′.

Определение 7. Конфигурация KF содержит p копий конфигурации KF″, если в блоке KF существует p непересекающихся подмножеств, каждое из которых содержит одну копию блока KF″.

Определение 8. Исходной конфигурацией KF_0 называется такая конфигурация, которой в момент $T=0$ обладает множество всех точек пространства $TP(N, V, S, Q_0)$ в состояниях отличных от Q_0.

Будем предполагать, что в момент $T=0$ только конечное число точек пространства $TP(N, V, S, Q_0)$ находится в состояниях отличных от Q_0.

Определение 9. Конфигурация KF способна произвести p потомков за время T, если, приняв KF за KF_0, можно найти такое $T'<T$, что в конфигурации KF′, которой обладает все пространство $TP(N, V, S, Q_0)$ в момент T' в состоянии отличном от Q_0, содержится не менее p копий KF.

Определение 10. Конфигурация KFS называется самовоспроизводящейся, если для любого целого $p>0$ существует такое T, что KFS способна воспроизвести p своих копий за время T.

Определения 1—10 формально вводят точечные воспроизводящиеся структуры. Момент времени $T=0$ является особым в том смысле, что если для всех моментов $T>0$ $TS(N, V, S, Q_0, F_l)$ подчинена правилам перехода F_l, то в момент $T=0$ начальное состояние ее определяется произвольно. Для проверки произвольной KF на самовоспроизводимость, она в момент $T=0$ помещается в $TS(N, V, S, Q_0, F_l)$. Это единственный момент времени, когда можно произвольно поместить в $TS(N, V, S, Q_0, F_l)$ любую KF. Нельзя отождествлять три понятия: точка $TP(N, V, S, Q_0)$, блок и конфигурация, так как это может привести к ложному логическому парадоксу, как, например, и произошло в [6]. Для роста копий KFS со временем в $TS(N, V, S, Q_0, F_l)$ справедливы следующие оценки.

Теорема 1. *Если KFS способна воспроизвести M своих копий за период T, то для M справедливы оценки*

$$0 < M \leqslant \frac{(G+2)^N}{R} T^N,$$

где G^N — наименьший N-мерный куб, содержащий KFS, и R — число точек KFS, находящихся в состояниях отличных от Q_0.

Доказательство. В момент $T=0$ вносим в $TS(N, V, S, Q_0, F_l)$ KF_0. Допустим, что KF_0 является KFS. Пусть N-мерный куб G^N является наименьшим блоком, содержащим KF_0. Так как за целочисленную единицу времени возбуждение произвольного блока G^N в $TP(N, V, S, Q_0)$ передается максимум всем точкам, непосредственно примыкающим к нему, то за период T максимальное число точек, куда распространилось возбуждение, очевидно, равно $(2T+G)^N$. Пусть количество точек в KF_0, находящихся в состояниях отличных от Q_0, равно R. А так как KF_0 за период T способна создавать M своих копий, то для M, как легко показать, справедливы следующие оценки

$$0 < M \leqslant \frac{(2T+G)^N}{R}. \tag{1}$$

Попытаемся неравенства (1) привести к виду

$$0 < M \leqslant K \cdot T^N. \tag{2}$$

Для этого достаточно найти такое $K > 0$, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{(2T+G)^N}{R} \leqslant KT^N \tag{3}$$

для всех $T = (1, 2, 3, \ldots)$. Проводя в (3) несложные преобразования, получаем

$$\left(\sqrt[N]{K} - \frac{2}{\sqrt[N]{R}}\right) T \geqslant \frac{G}{\sqrt[N]{R}} \tag{4}$$

Так как T принимает значения только $1, 2, 3, \ldots$, то из (4) получаем

$$K = \frac{(G+2)^N}{R}. \tag{5}$$

Подставляя значение K в (2), получаем доказательство нашей теоремы.

Из нашей теоремы, как следствие вытекает теорема 1 в [4], из которой следует, что в $TS(N, V, S, Q_0, F_l)$ мажорантой роста копий KFS является величина $C \cdot T^N$.

2. Прежде, чем перейти к рассмотрению вопроса о существовании простой универсальной воспроизводящейся матричной системы для ограниченных точечных структур, мы введем необходимые обозначения и определения.

$A(n, p)$ — матрица порядка n, элементы которой являются вычетами по $\bmod p$;

G_A — множество всевозможных матриц вида $A(n, p)$;

$\mathfrak{M}[M]$ — мощность произвольного множества M;

$U_{n_0}(n, p)$ — универсальная матрица порядка $n > n_0$, элементы которой являются вычетами по $\bmod p$;

U_{n_0} — множество всех матриц вида $U_{n_0}(n, p)$;

λ — собственное значение произвольной матрицы.

Остальные обозначения статьи соответствуют [5].

Определение 11. Матрица $A(n, p)$ $(n_0 < n < \infty)$ называется универсальной матрицей $U_{n_0}(n, p)$, если любая матрица $B(k, p)$ для $k < n$ является главным минором некоторой матрицы $A^m(n, p)$, принадлежащей множеству G_A.

За исключением специально оговоренных случаев, в настоящей статье под главным минором порядка k матрицы $A = (a_{ij})$ $(i, j = \overline{1, n})$ подразумевается минор порядка k с главной диагональю вида $a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \ldots a_{i_k i_k}$, где $i_{l+1} = i_l + 1$ $(1 \leqslant i_l \leqslant n - 1;\ l = \overline{1, k})$.

В терминах нашего определения вопрос о существовании универсальной матричной системы сводится к определению $\mathfrak{M}\,[U_{n_0}]$. Для доказательства основной теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. $\mathfrak{M}\,[G_A] = p^{n^2} - 1$.

Доказательство. Предполагая, что $A(n, p)$ содержит m_i элементов вида $i - 1$ $(i = \overline{1, p})$, и варьируя m_i от 0 до $p - 1$ так, чтобы $\sum_{i=1}^{p} m_i = n^2$, получаем

$$\mathfrak{M}[G_A] = \sum_{m_1 + \ldots + m_p = n^2} C_{n^2}^{m_1} \prod_{i=2}^{p} C^{m_i}_{n^2 - \sum_{k=1}^{i-1} m_k} = p^{n^2}.$$

Исключая теперь нулевую матрицу, получаем доказательство леммы.

Лемма 2. $\det A^l(n, p) = 0 \vee |\det A^l(n, p)| \geqslant 1$ $(l = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство леммы тривиально.

Лемма 3. $(0 \leqslant a_{ij} \leqslant M;\ i, j = \overline{1, n}) \rightarrow \left(|\det (a_{ij})| \leqslant \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n} M^n \right)$.

Доказательство. Из неравенства Адамара (см. [3], стр. 39) следует, что

$$|\det (a_{ij})|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \leqslant n^n \cdot M^{2n}. \tag{6}$$

Расширим $\det(a_{ij})$ $(i, j = \overline{1, n})$ до $\det(b_{ij})$ $(i, j = \overline{1, n+1})$, прибавляя сверху нулевую строку и слева столбец из элементов $M/2$. Тогда для этих определителей справедливо соотношение

$$\det (b_{ij}) = (M/2) \det (a_{ij}). \tag{7}$$

Вычтем теперь из каждого столбца $\det(b_{ij})$ его первый столбец. Получаем $\det(b_{ij})$ $(i, j = \overline{1, n+1})$ с $|b_{ij}| \leqslant M/2$. Применяя к нему неравенство (6), получаем

$$|\det (b_{ij})| \leqslant \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n+1}} M^{n+1}. \tag{8}$$

Сопоставляя (7) и (8), получаем доказательство леммы.

Лемма 4.

$$A \in G_A \to (\forall\lambda)\left(\det(A-\lambda E)=0 \to |\lambda| \leqslant (p-1)^n \cdot (n+1)^{\frac{n+1}{2}}+1\right).$$

Доказательство. Согласно [2] (см. § 7 гл. 3) уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ имеет вид

$$(-\lambda)^n+\sum_{i=1}^{n}(-\lambda)^{i-1}\cdot S_{n-i+1}=0, \tag{9}$$

где S_k равно сумме главных миноров (в обычном смысле слова) порядка k матрицы A. Левая часть (9) есть полином от λ степени n. Его корни удовлетворяют следующему неравенству (см. [3], стр. 43):

$$|\lambda| \leqslant 1+\max_i |S_i|. \tag{10}$$

Используя теперь лемму 3, путем элементарных преобразований получаем

$$|S_i| \leqslant C_n^i \frac{(i+1)^{\frac{i+1}{2}}(p-1)^i}{2^i} < (p-1)^n \cdot (n+1)^{\frac{n+1}{2}} \quad (i=\overline{1,n}). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), получаем доказательство леммы.

Лемма 5. *Для того, чтобы матрица $A \in U_{n_0}$, необходимо, чтобы* $(\exists\lambda_{\max}),\ (\forall\lambda)\,(\det(A-\lambda E)=0 \to (|\lambda| \leqslant \lambda_{\max})\,\&\,(\lambda_{\max}>1))$.

Доказательство. Так как матрица $A \in U_{n_0}$ неотрицательна, то согласно [2] (см. 4°, стр. 367) $\lambda'_{\max}$ любого главного порядка меньше n минора такой матрицы не превосходит ее $\lambda_{\max}$, т. е. $\lambda'_{\max} \leqslant \lambda_{\max}$. Тогда по [2] (см. теорему 3, стр. 94) для $\lambda^m_{\max}$ матриц A^m и $(\lambda'_{\max})^m$ ее главных миноров порядка меньше n получаем неравенство $(\lambda'_{\max})^m \leqslant \lambda^m_{\max}$.

Отсюда легко следует, что матрица $A(n,p) \notin U_{n_0}$ при $\lambda_{\max} \leqslant 1$, ибо для всех главных порядка меньше n миноров матриц $A^m(n,p)$ $(m=1,2,\ldots)$ в этом случае выполняется неравенство $(\lambda'_{\max})^m \leqslant 1$. Так как это противоречит определению универсальной матрицы, то лемма доказана.

Подсчитаем теперь число главных миноров порядка k матрицы A порядка n. Для этого, очевидно, достаточно подсчитать число различных подгрупп k рядом стоящих чисел в группе: $1,2,3,\ldots n$. Начиная отсчет таких подгрупп с числа 1 вправо, получаем неравенство

$$(n-k)-(k-1)n_1 \geqslant 0, \tag{12}$$

где n_1 в данном первом случае есть число таких подгрупп без одной. Сдвигая затем каждый раз отсчет на одно число вправо, получаем аналогично (12)

$$(n-k+1-i)-(k-1)n_i \geqslant 0 \quad (i=\overline{1,k-1}). \tag{13}$$

Из (13) легко получить общее число всех подгрупп k рядом стоящих чисел

$$N_1(k)=(k-1)+\sum_{i=1}^{k-1}\max_i(n_i), \tag{14}$$

где $\max\limits_i(n_i)$ есть наибольшее натуральное число n_i, при котором еще справедливо неравенство (13).

Однако формула (14) не пригодна для подсчета главных миноров любого порядка меньше или равного n. Действительно, наименьшее число n_1 в (12) должно быть равно 1, а это верно лишь для $k \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Из этого следует, что формула (14) справедлива лишь для подсчета главных миноров порядка меньше или равного $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Для числа главных миноров порядка больше $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, используя аналогичные рассуждения, получаем формулу

$$N_2(k) = n - k + 1.$$

Этим доказана следующая

Лемма 6. *Число главных миноров порядка k матрицы A порядка n равно*

$$N_1(k) = (k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} \max_i (n_i) \qquad \text{для } k \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

и

$$N_2(k) = n - k + 1 \qquad \text{для } k > \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

где $\max\limits_i (n_i)$ есть наибольшие целочисленные решения системы

$$(n-k+1-i)-(k-1)n_i \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, k-1}).$$

Лемма 7. *Число различных матриц $A^m(n,p) \in G_A$, необходимых для получения всевозможных матриц $B(k,p)$, являющихся главными минорами порядка k матриц $A^m(n,p)$, удовлетворяет неравенству*

$$m\{k\} \geqslant (p^{k^2}-1)/N_i(k) \qquad i = \begin{cases} 1 \text{ при } k \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] \\ 2 \text{ при } k > \left[\frac{n+1}{2}\right] \end{cases}.$$

Доказательство. Число различных матриц $B(k,p)$ по лемме 1 равно $p^{k^2}-1$. Число же главных миноров порядка k матрицы $A(n,p)$ дается леммой 6. Предполагая, что каждая матрица $A^m(n,p)$ дает различные главные миноры порядка k, отличающиеся от всех главных миноров порядка k матриц $A^l(n,p)$ $(l < m)$, мы получаем утверждение леммы.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы.

Теорема 2. $(\exists n_0), (\forall n)((n_0 < n < \infty) \rightarrow U_{n_0} = \varnothing)$.

Доказательство. Для простоты вычислений можно взять главные миноры порядка $n-1$. Тогда по лемме 7 для числа необходимых степеней m матрицы $A(n,p)$ (для получения всевозможных матриц $B(n-1, p)$, являющихся главными минорами матриц $A^m(n,p)$) должно выполняться неравенство

$$m\{n-1\} \geqslant (p^{(n-1)^2}-1)/2. \tag{15}$$

С другой стороны, так как у матриц $A(n,p) \in U_{n_0}$ $\lambda_{\max} > 1$ (лемма 5), то число m матриц $A^m(n,p) \in G_A$ по лемме 4 удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{\max}^m \leqslant (p-1)^n \cdot (n+1)^{\frac{n+1}{2}} + 1. \tag{16}$$

Используя элементарные преобразования, неравенство (16) приводим к виду

$$m < (np + (n+1)^2/2)/\ln \lambda_{\max}.$$

Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что

$$(\exists n_0), (\forall n)\ (n > n_0 \to (p^{(n-1)^2} > ((n+1)^2 + 2np + \ln \lambda_{\max})/\ln \lambda_{\max})),$$

а так как утверждение справедливости этого высказывания не вызывает затруднений, то этим доказательство теоремы закончено.

Наша теорема до некоторой степени аналогична теореме 2 из [4] в случае произвольно больших ограниченных сотообразных структур, автоматы которых могут находиться в одном из (p) возможных состояний.

В заключение приношу благодарность проф. Р. Полуэктову и Х. Салум за обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Улам С., Нерешенные математические задачи, М., 1964, с. 44.
2. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., 1966.
3. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров, М., 1968.
4. Moore E., Proc. Symp. Appl. Math., **14**, 17 (1962).
5. Николау Э., Введение в кибернетику, М., 1967.
6. Rosen R., Bull. Math. Biophys., **21**, 387 (1959).

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
10/IX 1969

V. ALADJEV

ISEPALJUNEVATE AUTOMAATIDE TEOORIAST TULENEV MATRIITSIDE PROBLEEM

Vaadeldakse universaalse isepaljuneva matriitssüsteemi olemust piiratud punktstruktuuris. Artikli esimeses osas käsitletakse formaalselt punktstruktuure E^N-is ja tõestatakse kasvukiiruste koopia teooria isepaljunevas konfiguratsioonis. Artikli teises osas esitatakse universaalne isepaljunev matriitssüsteem punktstruktuuride jaoks E^2-s ja tõestatakse sellise süsteemi olemasolu võimatuse teoreem piiratud süsteemi korral E^2-s.

V. ALADYEV

A PROBLEM ON MATRICES ARISING IN THE THEORY OF SELF-REPRODUCING AUTOMATA

This article concerns the question of the existence of a universal reproducing matrix system for finite pointed structures. In the first item, a formal description of pointed structures and a theorem about the velocity of the growth of copies of self-reproducing configurations are presented. In the second item, a universal reproducing matrix system (URMS) for pointed structures in E^2 is presented. Lastly, the theorem about the impossibility of the existence of URMS for finite pointed structures in E^2 is presented.