EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.2.04

С. УЛЬМ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СИНТЕЗА СУБОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

В задачах управления линейными системами с квадратичным критерием качества оптимальное управление $u(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$ порождается линейным замкнутым законом вида [1]

$$u(t) = K(t)x(t),$$

где $x(t)$ — текущее состояние системы, а элементы матрицы $K(t)$ вычисляются на основании решения дифференциально-матричного уравнения Риккати. Однако, реализация такого решения сопровождается рядом трудностей (неустойчивость процесса решения уравнения Риккати в прямом времени, жесткие требования в отношении объема памяти вычислительной машины и т. д., см. [2]).

Поэтому в [3] исходная задача разбивается на N независимых подсистем, а закон субоптимального управления ищется в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} K_i(t) A_i x(t),$$

где A_i — некоторые заданные матрицы разбиения, а $K_i(t)$ — матрицы, которые вычисляются на основании N независимых уравнений Риккати меньших размерностей.

С другой стороны, в [2] субоптимальный закон управления ищется в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) A_i x(t),$$

причем $\alpha_i(t)$ — заданные линейно независимые скалярные функции. Матрицы A_i определяются при этом по некоторому естественному вероятностному критерию.

В данной статье эти два подхода объединяются. Закон субоптимального управления ищется как в [3] в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} K_i(t) A_i x(t).$$

Используя упомянутый выше вероятностный критерий, формулируется задача оптимизации для выбора матриц разбиения A_i. Выводятся необходимые условия оптимальности для этой задачи и описывается итерационный процесс на двух уровнях для совместного вычисления матриц A_i и $K_i(t)$.

Пусть линейная динамическая система описывается системой уравнений

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u, \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор состояния, $u(t)$ — m-мерный вектор управления, $F(t)$ и $G(t)$ — соответственно $n \times n$ и $n \times m$ непрерывные по t матрицы, $x(t_0)$ — заданное начальное состояние системы (1).

Задача линейного оптимального регулятора будет состоять в определении управления $u(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$, которое минимизирует квадратичный критерий оптимальности

$$f = \frac{1}{2}\left\{ x'(t_1)P(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt, \right. \tag{2}$$

где $P(t_1)$ — симметричная неотрицательно определенная $n \times n$ матрица; $Q(t)$ — симметричная неотрицательно определенная непрерывная $n \times n$ матрица; $R(t)$ — симметричная положительно определенная непрерывная $m \times m$ матрица.

Известно, что при этих предположениях оптимальное управление порождается линейным замкнутым законом управления

$$u(t) = K(t)x(t), \tag{3}$$

где

$$K(t) = -R^{-1}(t)G'(t)M(t), \tag{4}$$

а $M(t)$ — решение дифференциально-матричного уравнения Риккати:

$$\begin{cases} -\dot{M} = F'(t)M + MF(t) - MG(t)R^{-1}(t)G'(t)M + Q(t) \\ M(t_1) = P(t_1) \end{cases} \tag{5}$$

(см., напр., [1]).

Известна также формула

$$f_{\text{opt}} = \frac{1}{2}x'(t_0)M(t_0)x(t_0). \tag{6}$$

Для нахождения приближенного управления в [3] система (1) разбивается на подсистемы заданием набора постоянных $m_i \times n$ матриц A_i $(i = 1, \ldots, N;\ n \geqslant N \geqslant 2)$, причем $\sum_{i=1}^{N} m_i = n$. Пусть A_i^+ обозначает матрицу псевдообратную к A_i и определяемую соотношением

$$A_i A_i^+ A_i = A_i \quad (i = 1, \ldots, N), \tag{7}$$

при этом

$$\sum_{i=1}^{N} A_i^+ A_i = I, \tag{8}$$

где I — единичная матрица порядка $n \times n$.

Отметим, что для нахождения псевдообратных A_i^+ следует образовать $n \times n$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_N \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Если A — неособенная, то существует

$$A^{-1} = (C_1 \ldots \underbrace{C_i}_{n \times m_i} \ldots C_N). \tag{10}$$

Поскольку справедливы соотношения:

$$A^{-1}A = \sum_{i=1}^{N} C_i A_i = I; \tag{11}$$

$$A_i C_j = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j \\ I_i, \text{ если } i = j \end{cases} \tag{12}$$

(I_i — единичная $m_i \times m_i$ матрица);

$$A_i C_i A_i = I_i A_i = A_i, \tag{13}$$

то

$$A_i^+ = C_i.\star \tag{14}$$

Тогда подзадачи выражаются в следующем виде [3]: минимизировать

$$f_i = \frac{1}{2}\Big\{y'_i(t_1) A_i^{+'} P(t_1) A_i^+ y_i(t_1) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} [y'_i(t) A_i^{+'} Q(t) A_i^+ y_i(t) + u^{i'}(t) R(t) u^i(t)] dt\Big\}, \tag{15}$$

причем

$$\begin{cases} \dot{y}_i = A_i F(t) A_i^+ y_i + A_i G(t) u^i(t) \\ y_i(t_0) = A_i x(t_0). \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $y_i(t)$ — m_i-мерный вектор состояния i-й подсистемы; $u^i(t)$ — соответствующий m-мерный вектор управления ($i = 1, \ldots, N$).

Оптимальное управление подсистемами дается формулами (17)—(19):

$$u^i(t) = K_i(t) y_i(t), \tag{17}$$

где

$$K_i(t) = -R^{-1}(t) [A_i G(t)]' S_i(t); \tag{18}$$

$S_i(t)$ — решение дифференциально-матричных уравнений Риккати

$$\begin{cases} -\dot{S}_i = [A_i F(t) A_i^+]' S_i + S_i [A_i F(t) A_i^+] - \\ -S_i [A_i G(t)] R^{-1}(t) [A_i G(t)]' S_i + A_i^{+'} Q(t) A_i^+; \\ S_i(t_1) = A_i^{+'} P(t_1) A_i^+. \end{cases} \tag{19}$$

Здесь S_i и K_i — соответственно $m_i \times m_i$ и $m \times m_i$ матрицы ($i = 1, \ldots, N$).

Субоптимальное управление системы (1) при критерии (2) дается формулой

$$u(t) = K^*(t) x(t), \tag{20}$$

где

$$K^*(t) = \sum_{i=1}^{N} K_i(t) A_i \quad (K^*(t) = m \times n \text{ матрица}). \tag{21}$$

---

* В [3] эта конструкция не приведена.

Критерий оптимальности при субоптимальном управлении имеет значение

$$I = \frac{1}{2} x'(t_0) L(t_0) x(t_0), \tag{22}$$

где $L(t)$ удовлетворяет линейному дифференциально-матричному уравнению

$$\begin{cases} -\dot{L} = B'(t) L + LB(t) + K^{*\prime}(t) R(t) K^*(t) + Q(t) \\ L(t_1) = P(t_1). \end{cases} \tag{23}$$

Если обозначить через $\Phi(t, \tau)$ переходную матрицу, соответствующую $B(t) = F(t) + G(t) K^*(t)$, то получим:

$$L(t) = \Phi'(t_1, t) P(t_1) \Phi(t_1, t) + \\ + \int_t^{t_1} \Phi'(\tau, t) [Q(\tau) + K^{*\prime}(\tau) R(\tau) K^*(\tau)] \Phi(\tau, t) d\tau. \tag{24}$$

Ясно, что задача выбора матриц разбиения является важной проблемой, поскольку от этого зависит качество субоптимального управления (20)—(21). Но в [3] никаких приемов, кроме метода проб и ошибок, для выбора матриц A_i не предлагается.

Следуя идеям статьи [2] критерием качества для выбора матриц разбиения A_i возьмем след матрицы $L(t_0)$, который обозначим через

$$\operatorname{tr} L(t_0). \tag{25}$$

В [2] отмечено, что функционал (25) имеет следующую физическую интерпретацию. Предположим, что начальное состояние $x(t_0)$ есть случайная переменная, которая равномерно распределена по поверхности n-мерной единичной сферы. В этом случае минимизация критерия (25) эквивалентна минимизации ожидаемого значения критерия (22).

Итак, мы получим следующую задачу оптимизации (задачу координации) для выбора матриц разбиения A_i:

минимизировать по A_i функционал (25), причем $L(t)$ определяется уравнением (23).

Пусть

$$B_i(t) = F(t) + G(t) K_i^*(t) \quad (i = 1, 2). \tag{26}$$

Рассмотрим уравнения, соответствующие (23):

$$-\dot{L}_i = B_i'(t) L_i + L_i B_i(t) + Q(t) + K_i^{*\prime}(t) R(t) K_i^*(t) \tag{27}$$

и найдем выражение для разности

$$\Delta L = L_1 - L_2 \quad (\text{ср. } [2]). \tag{28}$$

Перепишем $B_1(t)$ в виде:

$$B_1(t) = B_2(t) + G(t) (K_1^*(t) - K_2^*(t)). \tag{29}$$

Тогда

$$-\dot{L}_1 = B_2'(t) L_1 + L_1 B_2(t) + Q(t) + K_1^{*\prime}(t) R(t) K_1^*(t) + \\ + [K_1^*(t) - K_2^*(t)]' G'(t) L_1 + L_1 G(t) [K_1^*(t) - K_2^*(t)] \tag{30}$$

и по (27) и (30)

$$-\Delta\dot{L}(t) = B_2'(t) \Delta L + \Delta L B_2(t) + K_1^{*\prime}(t) R(t) K_1^*(t) - \\ - K_2^{*\prime}(t) R(t) K_2^*(t) + [K_1^*(t) - K_2^*(t)]' G'(t) L_1 + \\ + L_1 G(t) [K_1^*(t) - K_2^*(t)]. \tag{31}$$

Вычтем и прибавим к правой части уравнения (31) член

$$(K_1^*(t)-K_2^*(t))'R(t)K_2^*(t)+K_2^{*\prime}(t)R(t)(K_1^*(t)-K_2^*(t)).$$

Тогда получим

$$-\Delta\dot{L}(t)=B_2'(t)\Delta L(t)+\Delta L(t)B_2(t)+(K_1^*-K_2^*)'R(K_1^*-K_2^*)+ \\ +(K_1^*-K_2^*)'(G'L_1+RK_2^*)+(G'L_1+RK_2^*)'(K_1^*-K_2^*), \tag{32}$$

причем

$$\Delta L(t_1)=0. \tag{33}$$

Решением уравнения (32) с граничным условием (33) является

$$\Delta L(t)=\int_t^{t_1}\Phi_2'(\tau,t)[(K_1^*-K_2^*)'R(K_1^*-K_2^*)+ \\ +(K_1^*-K_2^*)'(G'L_1+RK_2^*)+(G'L_1+RK_2^*)'(K_1^*-K_2^*)]\Phi_2(\tau,t)\,d\tau, \tag{34}$$

где $\Phi_2(t,\tau)$ — переходная матрица, соответствующая $B_2(t)$.

Переставив нижние индексы в выражении (34), получим формулу для $-\Delta L(t)=L_2(t)-L_1(t)$:

$$-\Delta L(t)=\int_t^{t_1}\Phi_1'(\tau,t)[(K_1^*-K_2^*)'R(K_1^*-K_2^*)- \\ -(K_1^*-K_2^*)'(G'L_2+RK_1^*)-(G'L_2+RK_1^*)'(K_1^*-K_2^*)]\Phi_1(\tau,t)\,d\tau, \tag{35}$$

где $\Phi_1(t,\tau)$ — переходная матрица, соответствующая $B_1(t)$.

Поскольку

$$G'L_2+RK_1^*=(G'L_2+RK_2^*)+R(K_1^*-K_2^*),$$

то окончательно получим:

$$\Delta L(t)=\int_t^{t_1}\Phi_1'(\tau,t)[(K_1^*-K_2^*)'R(K_1^*-K_2^*)+ \\ +(K_1^*-K_2^*)'(G'L_2+RK_2^*)+(G'L_2+RK_2^*)'(K_1^*-K_2^*)]\Phi_1(\tau,t)\,d\tau. \tag{36}$$

Если матрицы A_i получают соответственно малые приращения $\varepsilon\Delta A_i$, то соответствующее приращение матрицы $K^*(t)$ равно

$$\varepsilon\Delta K^*(t)=\varepsilon\sum_{i=1}^{N}(\Delta K_i(t)A_i+K_i(t)\Delta A_i). \tag{37}$$

Обозначим $K_\varepsilon^*(t)=K^*(t)+\varepsilon\Delta K^*(t)$ и пусть $L_\varepsilon(t)$ — решение уравнения (23), если в нем $K^*(t)$ заменить на $K_\varepsilon^*(t)$. Тогда по формуле (36)

$$L_\varepsilon(t_0)-L(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi_\varepsilon'(t,t_0)[(K_\varepsilon^*-K^*)'R(K_\varepsilon^*-K^*)+ \\ +(K_\varepsilon^*-K^*)'(G'L+RK^*)+(G'L+RK^*)'(K_\varepsilon^*-K^*)]\Phi_\varepsilon(t,t_0)\,dt, \tag{38}$$

где $\Phi_\varepsilon(t,\tau)$ — переходная матрица, соответствующая $F(t)+G(t)K_\varepsilon^*(t)$.

Поскольку $\operatorname{tr}(A'B)=\operatorname{tr}(B'A)$, то по (37) и (38)

$$\operatorname{tr}[L_\varepsilon(t_0)-L(t_0)]=\operatorname{tr}\int_{t_0}^{t_1}\Phi'_\varepsilon(t,t_0)\,[\varepsilon^2\sum_{i=1}^{N}(\Delta K_iA_i+K_i\Delta A_i)'\times \times R\sum_{j=1}^{N}(\Delta K_jA_j+K_j\Delta A_j)+2\varepsilon(G'L+RK^*)'\times \times\sum_{i=1}^{N}(\Delta K_iA_i+K_i\Delta A_i)\,]\Phi_\varepsilon(t,t_0)\,dt. \tag{39}$$

Следовательно, в первом приближении по ε (ср. [2])

$$\operatorname{tr}[L_\varepsilon(t_0)-L(t_0)]=2\varepsilon\operatorname{tr}\int_{t_0}^{t_1}\Phi'(t,t_0)\,(G'L+RK^*)'\times \times\sum_{i=1}^{N}(\Delta K_iA_i+K_i\Delta A_i)\,\Phi(t,t_0)\,dt. \tag{40}$$

Дальше нетрудно видеть, что

$$\Delta K_i(t)=-R^{-1}(t)\,[A_iG(t)]'\Delta S_i- -R^{-1}(t)\,[\Delta A_iG(t)]'S_i \tag{41}$$

и

$$-\dot{\Delta S_i}=[A_iF(t)\overset{+}{A_i}]'\Delta S_i+\Delta S_i[A_iF(t)\overset{+}{A_i}]- -S_i[A_iG(t)]R^{-1}(t)\,[A_iG(t)]'\Delta S_i-\Delta S_i[A_iG(t)]R^{-1}(t)\,[A_iG(t)]'S_i+ +[A_iF(t)\Delta\overset{+}{A_i}+\Delta A_iF(t)\overset{+}{A_i}]'S_i+S_i[\Delta A_iF(t)\overset{+}{A_i}+A_iF(t)\Delta\overset{+}{A_i}]- -S_i[\Delta A_iG(t)]R^{-1}(t)\,[A_iG(t)]'S_i-S_i[A_iG(t)]R^{-1}(t)\,[\Delta A_iG(t)]'S_i+ +\overset{+}{A_i}{}'Q(t)\Delta\overset{+}{A_i}+\Delta\overset{+}{A_i}{}'Q(t)\overset{+}{A_i}, \tag{42}$$

причем

$$\Delta S_i(t_1)=(\Delta\overset{+}{A_i})'P(t_1)\overset{+}{A_i}+\overset{+}{A_i}{}'P(t_1)\Delta\overset{+}{A_i}. \tag{43}$$

Пусть $\Psi_i(t,\tau)$ — переходная матрица, соответствующая матрице

$$H_i(t)=A_iF(t)\overset{+}{A_i}-[A_iG(t)]R^{-1}(t)\,[A_iG(t)]'S_i. \tag{44}$$

Тогда

$$\Delta S_i=\Psi_i'(t_1,t)\,[\Delta\overset{+}{A_i}{}'P(t_1)\overset{+}{A_i}+\overset{+}{A_i}{}'P(t_1)\Delta\overset{+}{A_i}]\Psi_i(t_1,t)+ +\int_t^{t_1}\Psi_i'(\tau,t)\,\{[A_iF(\tau)\Delta\overset{+}{A_i}+\Delta A_iF(\tau)\overset{+}{A_i}]'S_i(\tau)+ +S_i(\tau)\,[\Delta A_iF(\tau)\overset{+}{A_i}+A_iF(\tau)\Delta\overset{+}{A_i}]- -S_i(\tau)\,[\Delta A_iG(\tau)]R^{-1}(\tau)\,[A_iG(\tau)]'S_i(\tau)- -S_i(\tau)\,[A_iG(\tau)]R^{-1}(\tau)\,[\Delta A_iG(\tau)]'S_i(\tau)+ +\overset{+}{A_i}{}'Q(\tau)\Delta\overset{+}{A_i}+\Delta\overset{+}{A_i}{}'Q(\tau)\overset{+}{A_i}\}\Psi_i(\tau,t)\,d\tau\quad(i=1,\ \dots,\ N). \tag{45}$$

Поскольку скалярное произведение двух с одинаковыми размерностями матриц определяется формулами (ср. [4])

$$(C,D)=\operatorname{tr}(CD')=\operatorname{tr}(DC')=\operatorname{tr}(D'C)=\operatorname{tr}(C'D), \tag{46}$$

то нашей дальнейшей задачей будет представить (40) в виде

$$\operatorname{tr}[L_\varepsilon(t_0) - L(t_0)] = \varepsilon \operatorname{tr} \sum_{i=1}^{N} G'_i \Delta A_i. \tag{47}$$

Если это выполняется, то

$$G_i = \operatorname{grad}_i [\operatorname{tr} L(t_0)], \tag{48}$$

где $\operatorname{grad}_i[\operatorname{tr} L(t_0)]$ — i-тая компонента градиента функции $\operatorname{tr} L(t_0)$ (или «частный» градиент по A_i).

Формулу (47) можно получить на основании (40), (41) и (45), если использовать элементарные свойства операции tr (ср. (46)) и формулы для приращений псевдообратных матриц

$$\Delta A_i^{+} = -\sum_{j=1}^{N} A_j^{+} \Delta A_j A_i \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{49}$$

Последние можно выводить следующим образом: если A представлена в виде (9), то в первом приближении

$$\Delta(A^{-1}) = -A^{-1} \begin{pmatrix} \Delta A_1 \\ \vdots \\ \Delta A_N \end{pmatrix} A^{-1} \tag{50}$$

и на основании (14)

$$\Delta(A^{-1}) = -(A_1^{+} \ldots A_N) \begin{pmatrix} \Delta A_1 \\ \vdots \\ \Delta A_N \end{pmatrix} (A_1^{+} \ldots A_N^{+}) =$$

$$= -\left(\sum_{j=1}^{N} A_j^{+} \Delta A_j A_1^{+}, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^{N} A_j^{+} \Delta A_j A_N^{+}\right), \tag{51}$$

т. е. формулы (49) справедливы.

Пренебрегая длинными, но несложными выкладками, дадим окончательное выражение для G_i $(i = 1, \ldots, N)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G_i = \int_{t_0}^{t_1} [A_i{}' P(t_1) \sum_{j=1}^{N} A_j^{+} W_j(t_1, t, t_0) A_j^{+'} + K_i'(t) Z(t, t_0) - \\ - S_i(t) A_i Z'(t, t_0) R^{-1}(t) G'(t)] dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t}^{t_1} [A_i^{+'} \sum_{j=1}^{N} D_j(\tau) W_j(\tau, t, t_0) A_j^{+'} + S_i(\tau) W_i(\tau, t, t_0) E_i(\tau)] d\tau. \end{aligned} \tag{52}$$

Здесь введены обозначения:

$$Z(t, t_0) = [G'(t) L(t) + R(t) K^*(t)] \Phi(t, t_0) \Phi'(t, t_0);$$

$$W_i(\tau, t, t_0) = \Psi_i(\tau, t) V_i(t, t_0) \Psi_i(\tau, t), \quad \text{где}$$

$$V_i(t, t_0) = U_i(t, t_0) + U_i'(t, t_0),$$

$$U_i(t, t_0) = A_i G(t) R^{-1}(t) Z(t, t_0) A_i';$$

$$D_i(t) = Q(t) A_i^{+} + F'(t) A_i' S_i(t);$$

$$E_i(t) = S_i(t) [A_i G(t)] R^{-1}(t) G'(t) - A_i^{+'} F'(t).$$

Уравнения

$$G_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{53}$$

являются необходимыми условиями оптимальности для выбора матриц разбиения A_i (относительно критерия (25)).

Приведем вычислительную схему на двух уровнях для нахождения оптимальных A_i градиентным методом.

1° II уровень (центр) выбирает начальные приближения $\overset{(0)}{A_i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ для матриц разбиения и вычисляет $\overset{+(0)}{A_i}$.

2° Подсистемы I уровня $(i = 1, \ldots, N)$

а) решают дифференциально-матричные уравнения Риккати (ср. (19))

$$-\dot{\overset{(0)}{S_i}} = [\overset{(0)}{A_i} F(t) \overset{+(0)}{A_i}]' \overset{(0)}{S_i} + \overset{(0)}{S_i} [\overset{(0)}{A_i} F(t) \overset{+(0)}{A_i}] -$$
$$- \overset{(0)}{S_i} [\overset{(0)}{A_i} G(t)] R^{-1}(t) [\overset{(0)}{A_i} G(t)]' \overset{(0)}{S_i} + \overset{+'(0)}{A_i} Q(t) \overset{+(0)}{A_i}; \tag{54}$$
$$\overset{(0)}{S_i}(t_1) = \overset{+'(0)}{A_i} P(t_1) \overset{+(0)}{A_i};$$

б) вычисляют матрицы

$$\overset{(0)}{K_i}(t) = -R^{-1}(t) [\overset{(0)}{A_i} G(t)]' \overset{(0)}{S_i}(t); \tag{55}$$

$$\overset{(0)}{D_i}(t) = Q(t) \overset{+(0)}{A_i} + F'(t) A_i'^{(0)} S_i^{(0)}(t); \tag{56}$$

$$\overset{(0)}{E_i}(t) = \overset{(0)}{S_i}(t) [\overset{(0)}{A_i} G(t)] R^{-1}(t) G'(t) - \overset{+'(0)}{A_i} F'(t); \tag{57}$$

в) вычисляют матрицы перехода $\overset{(0)}{\Psi_i}(t, \tau)$, соответствующие

$$\overset{(0)}{H_i}(t) = \overset{(0)}{A_i} F(t) \overset{+(0)}{A_i} - [\overset{(0)}{A_i} G(t)] R^{-1}(t) [\overset{(0)}{A_i} G(t)]' \overset{(0)}{S_i}. \tag{58}$$

3° II уровень

а) вычисляет $$K^{*(0)} = \sum_{i=1}^{N} \overset{(0)}{K_i}(t) \overset{(0)}{A_i}; \tag{59}$$

б) вычисляет матрицу перехода $\Phi^{(0)}(t, \tau)$, соответствующую

$$B^{(0)}(t) = F(t) + G(t) K^{*(0)}(t); \tag{60}$$

в) вычисляет

$$L^{(0)}(t) = \Phi'^{(0)}(t_1, t) P(t_1) \Phi^{(0)}(t_1, t) +$$
$$+ \int_t^{t_1} \Phi'^{(0)}(\tau, t) [Q(\tau) + K^{*'(0)}(\tau) R(\tau) K^{*(0)}(\tau)] \Phi^{(0)}(\tau, t)\, d\tau; \tag{61}$$

г) вычисляет матрицы $Z^{(0)}(t, t_0)$ и $\overset{(0)}{W_i}(\tau, t, t_0)$ $(i = 1, \ldots, N)$;

д) вычисляет новые приближения $\overset{(1)}{A_i}$ для матриц разбиения по формулам (ср. (52))

$$\overset{(1)}{A_i} = \overset{(0)}{A_i} - \overset{(0)}{\varepsilon} \overset{(0)}{G_i} \quad (i = 1, \ldots, N); \tag{62}$$

е) вычисляет $\overset{+(1)}{A_i}$ $(i = 1, \ldots, N)$.

Процесс повторяется (индекс «0» заменяется индексом «1» и т. д.)

Отметим, что вычисление интегралов в (62), содержащих W_i, можно провести с помощью подсистем. Для этого центр должен сообщить им соответствующие матрицы W_i.

В заключение рассмотрим простой пример. Пусть

$$F=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\quad G=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};\quad Q=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix};\quad R=2;\ \begin{matrix}t_0=0;\\ t_1=2.\end{matrix}$$

Выбираем $A_1^{(0)}=(1\ 0)$; $A_2^{(0)}=(0\ 1)$. Тогда

$$S_1^{(0)}(t)=-2t+4;\quad S_2^{(0)}(t)=0;\quad K^{*(0)}(t)=(0\ 0);\quad L^{(0)}(0)=\begin{pmatrix}4&4\\4&\frac{16}{3}\end{pmatrix}.$$

Пусть $x(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Тогда $f^{(0)}=x'(0)L^{(0)}(0)x(0)=2.$

Если положить $\varepsilon^{(0)}=\frac{1}{13}$, получим:

$$A_1^{(1)}=(1\ 1);\quad A_2^{(1)}=(0\ 1);\quad S_1^{(1)}(t)=S_2^{(1)}(t)=\frac{2(e^4-e^{2t})}{e^4+e^{2t}};$$

$$K^{*(1)}(t)=\left(-\frac{S_1^{(1)}}{2};\ -S_1^{(1)}\right);\qquad f^{(1)}=x'(0)L^{(1)}(0)x(0)\approx 1{,}3712.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R. E., In: Math. Opt. Techniques, ed. R. E. Bellmann, Berkeley, Univ. Calif. Press, 1963.
2. Kleinman D. L., Athans M., IEEE Trans. Autom. Control, **13**, 150 (1968).
3. Meditch J. S., IEEE Trans. Autom. Control, **11**, 433 (1966).
4. Athans M., Inform. and Control, **11**, 592 (1968).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
25/IV 1969

S. ULM

ÜHEST SUBOPTIMAALSETE JUHTIMISTE SÜNTEESI MEETODIST

Ruutkriteeriumiga lineaarse dünaamilise süsteemi suboptimaalset juhtimist $u(t)$ otsitakse kujul (vrd. [3])

$$u(t)=\sum_{i=1}^{N}K_i(t)A_ix(t)$$

kus $x(t)$ on süsteemi jooksev asend. Teatavat tõenäosuslikku kriteeriumi [2] kasutades tuletatakse tarvilikud tingimused jaotusmaatriksite A_i optimaalseks valikuks. Kirjeldatakse kahenivoolist iteratsiooniprotsessi maatriksite $K_i(t)$ ja A_i samaaegseks arvutamiseks.

S. ULM

CERTAIN METHOD OF SYNTHESIS OF SUBOPTIMAL CONTROL

In this paper, suboptimal control for the linear dynamical system with quadratic criterion of quality is constructed in the form of [3]

$$u(t)=\sum_{i=1}^{N}K_i(t)A_ix(t)$$

where $x(t)$ — current state of system. Necessary conditions for optimal choice of the partitioning matrices A_i are derived, using a certain probability criterion [2]. Two-level iteration process for simultaneous calculation of matrices $K_i(t)$ and A_i is described.