EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.2.03

М. ЛЕВИН

О НАИЛУЧШИХ ФОРМУЛАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

1. Случай квадратурных формул

Рассмотрим формулу

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(\lambda_k) + R_n(f), \tag{1}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ заданные числа из отрезка $[0, 1]$.

Пусть $g_m(x, u)$ непрерывная на квадрате $[0, 1;\ 0, 1]$ функция, удовлетворяющая условиям: функции $g_m(\lambda_1, u), \ldots, g_m(\lambda_n, u)$ линейно независимы,

$$g_m(\lambda_k, u) = \frac{d^m}{du^m} \int_0^1 g_m(\lambda_k, v)\, g_m(u, v)\, dv \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

$$\varphi_m(u) = \frac{d^m}{du^m} \int_0^1 \varphi_m(v)\, g_m(u, v)\, dv,$$

где

$$\varphi_m(u) = \int_0^1 g_m(x, u)\, dx.$$

Через $W_{L_2}(g_m)$ обозначим класс всех функций $f(x)$, на отрезке $[0, 1]$ имеющих абсолютно-непрерывную производную порядка $m-1$, производную порядка m, для которой норма $\|f^{(m)}(x)\|_{L_2} \leqslant M$, и допускающих представление

$$f(x) = \int_0^1 f^{(m)}(u)\, g_m(x, u)\, du. \tag{2}$$

Формула (1) называется наилучшей в классе функций $W_{L_2}(g_m)$, если в ней веса $A_1, \ldots, A_n$ выбраны так, что величина

$$R_n = \sup_{f \in W_{L_2}(g_m)} |R_n(f)|$$

принимает наименьшее значение.

Теорема 1. *Среди формул (1) в классе функций $W_{L_2}(g_m)$ наилучшая формула существует, причем ее веса могут быть вычислены по формуле*

$$A_i = \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

где определители

$$\Delta^{(i)} = |\overset{(i)}{g_{kj}}|_{k,j=1}^{n}, \qquad \Delta = |\int_0^1 g_m(\lambda_k, u) g_m(\lambda_j, u)\, du|_{k,j=1}^{n}$$

и числа

$$\overset{(i)}{g_{kj}} = \begin{cases} \int_0^1 g_m(\lambda_k, u) g_m(\lambda_j, u)\, du, & k \neq i \\ \int_0^1 \varphi_m(u) g_m(\lambda_j, u)\, du, & k = i. \end{cases}$$

Верхняя грань ошибки наилучшей формулы

$$R_n = M\delta, \tag{4}$$

где

$$\delta = \|K(u)\|_{L_2}, \quad K(u) = \varphi_m(u) - \sum_{k=1}^{n} A_k g_m(\lambda_k, u).$$

Доказательство. Подстановкой (2) в (1) легко убедиться в справедливости (4). Существование наилучшей формулы, т. е. $\min R_n$, следует из линейной независимости функций $g_m(\lambda_k, u)$. Веса этой формулы в виде (3) мы получим, если решим систему

$$\frac{\partial}{\partial A_j} R_n = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

методом Крамера, что и доказывает теорему.

Приведем примеры классов $W_{L_2}(g_m)$.

а) Класс $\overset{(m)}{W}_{0L_2}(M; 0, 1)$ $(m > 1)$, состоящий из функций $f(x)$, имеющих на $[0, 1]$ абсолютно-непрерывную производную $f^{(m-1)}(x)$ и удовлетворяющих условиям: $\|f^{(m)}\|_{L_2} \leqslant M$, $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(m-1)}(0) = 0$. Для этого класса, который рассматривался в [1, 2], $g_m(x, u) \cdot (m-1)! = (x-u)^{m-1} E(x-u)$. *

б) Класс $\overset{(2r)}{W}_{01L_2}$ функций $f(x)$, имеющих на $[0, 1]$ абсолютно-непрерывную производную порядка $2r-1$ и производную порядка $2r$, ограниченную по норме в L_2 числом M, и удовлетворяющих условию

$$f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = \ldots = f^{(r-1)}(0) = f^{(r-1)}(1) = 0. \tag{5}$$

Функции этого класса допускают представление (2), где надо взять $m = 2r$, $g_{2r}(x, u) = G(x, u)$. Здесь $G(x, u)$ — функция Грина для оператора d^{2r}/dx^{2r} с краевыми условиями (5). **

При $r = 1$ этот класс рассматривался, например, в [3].

Приведем пример возможного решения экстремальной задачи в классах функций, для которых выполнения условия (2) не требуется.

Рассмотрим класс $\overset{(2r)}{W}_{L_2}$ функций $f(x)$, имеющих на $[0, 1]$ абсолютно-непрерывную производную порядка $2r-1$ и производную порядка $2r$, ограниченную в L_2 по норме числом M.

Для этого класса функций среди формул вида

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(\lambda_k) + \sum_{k=0}^{r-1} [B_k f^{(k)}(0) + C_k f^{(k)}(1)] + R_n^{(r)}(f) \tag{6}$$

---

* Функция $E(x-u) = 0$ для $x \leqslant u$ и $E(x-u) = 1$ для $x > u$.

** Отметим, что для нее

$$\varphi_{2r}(u) = \int_0^1 G(x, u)\, dx = \frac{u^r (u-1)^r}{(2r)!}.$$

требуется выбрать наилучшую. Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — заданные числа, отличные от 0 и 1.

По теореме 1 для класса $W^{(2r)}_{01L_2}$ в наилучшей формуле (6) веса $A_1, \ldots, A_n$ могут быть вычислены по (3), где $m = 2r$, $g_{2r}(x, u) = G(x, u)$ — функция Грина, определенная выше. Обозначим эти веса через

$$A^*_1, \ldots, A^*_n. \tag{7}$$

Теперь вернемся к классу $W^{(2r)}_{L_2}$. Пусть в (6) веса $A_1, \ldots, A_n$ есть числа (7). Потребуем, чтобы (6) была точна для $f(x) = 1, x, \ldots, x^{2r-1}$. Это приведет к системе

$$\sum_{k=0}^{r-1} (\alpha_{ki} B_k + \beta_{ki} C_k) = \gamma_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2r-1), \tag{8}$$

где

$$\alpha_{ki} = 0 \ (k \neq i), \ \alpha_{ki} = k! \ (k = i), \ \beta_{ki} = 0 \ (i < k),$$

$$\beta_{ki} = i!/(i-k)! \ (i \geqslant k), \ \gamma_i = 1/(i+1) - \sum_{k=1}^{n} A^*_k \lambda^i_k.$$

Определитель системы (8) отличен от нуля. Пусть решениями этой системы *** будут

$$B^*_0, \ldots, B^*_{r-1}, C^*_0, \ldots, C^*_{r-1}. \tag{9}$$

Покажем, что среди формул (6) наилучшей для класса $W^{(2r)}_{L_2}$ является та, у которой веса есть числа (7) и (9).

Для этого отметим такой факт.

Пусть F_1 и F_2 — множества функций такие, что $F_1 \subset F_2$, $R(f)$ — аддитивный функционал на F_2, для каждой функции $f \in F_2$ найдется такая функция φ_f, что $f + \varphi_f \in F_1$ и $R(\varphi_f) = 0$. Тогда

$$\sup_{f \in F_2} |R(f)| = \sup_{f \in F_1} |R(f)|. \tag{10}$$

Если взять $F_2 = W^{(2r)}_{L_2}$, $F_1 = W^{(2r)}_{01L_2}$, $R(f) = R^{(r)}_n(f)$, $-\varphi_f = H_{2r-1}(x)$ многочлен степени $2r-1$, удовлетворяющий условиям

$$H^{(i)}_{2r-1}(0) = f^{(i)}(0), \quad H^{(i)}_{2r-1}(1) = f^{(i)}(1) \qquad (i = 0, \ldots, r-1),$$

и учесть, что формула (6) с весами (7) и (9) точна для любого многочлена степени $2r-1$, то по (10) мы получим

$$\sup_{f \in W^{(2r)}_{L_2}} \left|R^{(r)}_n(f)\right| = \sup_{f \in W^{(2r)}_{01L_2}} \left|R^{(r)}_n(f)\right|. \tag{11}$$

Для рассматриваемой формулы величина, стоящая в (11) справа, принимает наименьшее значение, значит то же можно сказать и о величине, стоящей в (11) слева, т. е. формула (6) с весами (7) и (9) есть наилучшая в классе $W^{(2r)}_{L_2}$.

Отметим, что наилучшие в классах функций квадратурные формулы с заданными узлами и с требованием быть точными для многочленов некоторой степени, рассматривались в ряде работ, например, в [4–7].

*** Их можно выписать в явном виде по формулам Крамера.

2. Случай кубатурных формул

Пусть V есть r-мерный куб: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, r)$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_r)$, $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_r)$, $dv_x = dx_1 \ldots dx_r$, $dv_u = du_1 \ldots du_r$.

Через $W_{L_2}(g_{m_1}, \ldots, g_{m_r})$ обозначим класс функций $f(\bar{x})$, которые в кубе V имеют абсолютно-непрерывные производные

$$f^{(i_1+\ldots+i_r)}_{x_1^{i_1}\ldots x_r^{i_r}}(\bar{x}) \qquad (i_1 + \ldots + i_r < m_1 + \ldots + m_r;\ i_1 \leqslant m_1, \ldots\ i_r \leqslant m_r)$$

и производную

$$f^{(m_1+\ldots+m_r)}_{x_1^{m_1}\ldots x_r^{m_r}}(\bar{x}),$$

ограниченную по норме в L_2 числом M, и которые допускают представление

$$f(\bar{x}) = \int_V f^{(m_1+\ldots+m_r)}_{x_1^{m_1}\ldots x_r^{m_r}}(\bar{u}) \prod_{k=1}^{r} g_{m_k}(x_k, u_k)\, dv_u, \tag{12}$$

где функции $g_{m_k}(x_k, u_k)$ $(k = 1, \ldots, r)$ (каждую из них рассматриваем с соответствующим набором чисел $\lambda_{k1}, \ldots, \lambda_{kn_k}$), определены в начале статьи.

Примером такого класса могут быть все функции $f(x, y)$, для которых в квадрате $[0{,}1;\ 0{,}1]$ производные $f^{(i+j)}_{x^i y^j}(x, y)$ $(i \leqslant 2,\ j \leqslant 2,\ i + j < 4)$ абсолютно непрерывны, $\|f^{(4)}_{x^2y^2}(x, y)\|_{L_2} \leqslant M$ и которые удовлетворяют условию $f(x, 0) \equiv f(x, 1) \equiv f(0, y) \equiv f(1, y) \equiv 0$. Для функций этого класса $g_2(x, u) = (x - u)E(x - u) - x(1 - u)$.

Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_V f(\bar{x})\, dv_x = \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n_1, \ldots, n_r} A_{i_1 \ldots i_r} f(\lambda_{1i_1}, \ldots, \lambda_{r,i_r}) + R(f), \tag{13}$$

где узлы λ_{ji_j} $(j = 1, \ldots, r;\ i_j = 1, \ldots, n_j)$ — фиксированы.

Среди формул (13) наилучшей в классе $W_{L_2}(g_{m_1}, \ldots, g_{m_r})$ называется та, для которой величина

$$R = \sup_{f \in W_{L_2}(g_{m_1}, \ldots, g_{m_r})} |R(f)|$$

принимает наименьшее значение.

Теорема 2. *Веса наилучшей формулы* (13) *в классе* $W_{L_2}(g_{m_1}, \ldots, g_{m_r})$ *имеют вид*

$$A_{i_1 \ldots i_r} = A^{(n_1)}_{i_1} \ldots A^{(n_r)}_{i_r} \qquad (i_j = 1, \ldots, n_j;\ j = 1, \ldots, r), \tag{14}$$

где $A^{(n_j)}_{i_j}$ $(i_j = 1, \ldots, n_j)$ — *веса наилучшей в классе* $W_{L_2}(g_{m_j})$ *формулы* (1) *при* $n = n_j$, $\lambda_k = \lambda_{jk}$ $(k = 1, \ldots, n_j)$. *Для этой формулы*

$$R = M \left[\prod_{k=1}^{r} \varrho_k^2 - \prod_{k=1}^{r} (\varrho_k^2 - \delta_k^2) \right]^{1/2}, \tag{15}$$

где

$$\varrho_k = \Big\| \int_0^1 g_{m_k}(x, u)\,dx \Big\|_{L_2}, \qquad \delta_k = \|K_k(u)\|_{L_2},$$

$$K_k(u) = \int_0^1 g_{m_k}(x, u)\,dx - \sum_{i_k=1}^{n_k} \overset{(n_k)}{A_{i_k}}\, g_{m_k}(\lambda_{ki_k}, u) \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

Доказательство. Нетрудно увидеть, что

$$R = M\|K(\bar{u})\|_{L_2}, \tag{16}$$

где

$$K(\bar{u}) = \prod_{k=1}^{r} \int_0^1 g_{m_k}(x_k, u_k)\,dx_k - \sum_{i_1, \ldots, i_r=1}^{n_1, \ldots, n_r} A_{i_1 \ldots i_r} \prod_{k=1}^{r} g_{m_k}(\lambda_{ki_k}, u_k).$$

Учитывая линейную независимость функций

$$\prod_{k=1}^{r} g_{m_k}(\lambda_{ki_k}, u_k) \qquad (i_k = 1, \ldots, n_k;\ k = 1, \ldots, r),$$

получаем, что веса $A_{i_1 \ldots i_r}$ наилучшей формулы (13) представляют единственное решение системы

$$\frac{\partial}{\partial A_{j_1 \ldots j_r}} R = 0 \qquad (j_k = 1, \ldots, n_k;\ k = 1, \ldots, r). \tag{17}$$

Используя определение чисел $\overset{(n_j)}{A_{i_j}}$, непосредственной проверкой убеждаемся, что числа (14) удовлетворяют системе (17), что доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства (15) воспользуемся следующим фактом: если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимые функции из L_2 и величина

$$\min_{\{A_k\}} \Big\|\varphi - \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_k\Big\|_{L_2}$$

достигается при $A_k = A_k^*$, то

$$\Big\|\varphi - \sum_{k=1}^{n} A_k^* \varphi_k\Big\|^2_{L_2} = \|\varphi\|^2_{L_2} - \Big\|\sum_{k=1}^{n} A_k^* \varphi_k\Big\|^2_{L_2}.$$

Учитывая это, мы получаем для наилучшего приближения в L_2 функций

$$\int_0^1 g_{m_k}(x_k, u_k)\,dx_k \quad \text{суммами} \quad \sum_{i_k=1}^{n_k} A_{i_k} g_{m_k}(\lambda_{ki_k}, u_k)$$

следующие равенства

$$\delta_k^2 = \varrho_k^2 - \int_0^1 \Big[\sum_{i_k=1}^{n_k} \overset{(n_k)}{A_{i_k}}\, g_{m_k}(\lambda_{ki_k}, u_k)\Big]^2 du_k \qquad (k = 1, \ldots, r). \tag{18}$$

Так же для наилучшего приближения в L_2 функции

$$\prod_{k=1}^{r} \int_0^1 g_{m_k}(x_k, u_k)\, dx_k$$

суммой

$$\sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{n_1,\dots,n_r} A_{i_1\dots i_r} \prod_{k=1} g_{m_k}(\lambda_{ki_k}, u_k)$$

мы получаем, воспользовавшись формулой (14), что

$$\min_{\{A_{i_1\dots i_r}\}} \|K(\bar{u})\|^2_{L_2} = \prod_{k=1}^{r} \varrho_k^2 - \prod_{k=1}^{r} \int_0^1 \Big[\sum_{i_k=1}^{n_k} A_{i_k}^{(n_k)} g_{m_k}(\lambda_{ki_k}, u_k)\Big]^2 du_k.$$

Отсюда после упрощения правой части с помощью равенств (18) мы получим, согласно (16), для наилучшей в классе $W_{L_2}(g_{m_1}, \dots, g_{m_r})$ формулы (13) равенство (15).

Этим теорема доказана.

Приведем пример решения экстремальной задачи для класса функций, в определении которого не требуется выполнения условия (12).

Через F обозначим класс функций $f(x,y)$, имеющих в квадрате $D = [0,1; 0,1]$ абсолютно-непрерывные производные $f_{x^i y^j}^{(i+j)}$ $(i \leqslant 2, j \leqslant 2, i+j < 4)$ и производную $f_{x^2y^2}^{(4)}$, ограниченную по норме в метрике L_2 числом M.

Для функций этого класса среди формул вида

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = A \cdot \int_L f(x,y)\,ds + \sum_{i,j=0}^{n_1+1,\, n_2+1} A_{ij} f(\lambda_{1i}, \lambda_{2j}) + R_{n_1 n_2}(f), \qquad (19)$$

где узлы $(\lambda_{1i}, \lambda_{2j})$ $(i = 1, \dots, n_1;\ j = 1, \dots, n_2)$ фиксированы, $\lambda_{10} = \lambda_{20} = 0$, $\lambda_{1n_1+1} = \lambda_{2n_2+1} = 1$, L — контур области D, требуется найти наилучшую, т. е. выбрать числа A, A_{ij} так, чтобы величина

$$\sup_{f \in F} |R_{n_1 n_2}(f)|$$

приняла наименьшее значение.****

Через F_{01} обозначим класс тех функций из F, которые удовлетворяют условию $f(x,0) \equiv f(x,1) \equiv f(0,y) \equiv f(1,y) \equiv 0$. Функции этого класса удовлетворяют (12), где надо взять $r = 2$, $m_1 = m_2 = 2$, $g_{m_i}(x,u) = (x-u)E(x-u) - x(1-u)$.

По теореме 2 для этого класса функций у наилучшей формулы (19) веса имеют вид

$$A_{ij} = A_i^{(n_1)} A_j^{(n_2)} \qquad (i = 1, \dots, n_1;\ j = 1, \dots, n_2),$$

где для каждого $k = 1, 2$ числа $A_i^{(n_k)}$ $(i = 1, \dots, n_k)$ есть веса наилуч-

**** Рассмотрим некоторый линейный функционал $r(f)$ в классе Φ функций f с ограниченной нормой для некоторой смешанной производной. Пусть $\varphi(x)$ функция одной переменной, $\varphi \in \Phi$, $N\varphi \in \Phi$ при любом N. Если $r(\varphi) \neq 0$, то $\sup_{\Phi} |r(f)| = \infty$. Итак, в классе Φ экстремальная задача для $r(f)$ может иметь смысл только тогда, когда $r(f) = 0$ для функций одной переменной из Φ. Отсюда и наличие интеграла в правой части формулы (19).

шей формулы (1) при $n=n_k$, $\lambda_1=\lambda_{k1}, \ldots, \lambda_{n_k}=\lambda_{kn_k}$ в классе функций $W_{L_2}(g_2)$, где $g_2(x,u)=(x-u)E(x-u)-x(1-u)$. При этом

$$\sup_{f\in F_{01}}|R_{n_1 n_2}(f)| = M\sqrt{\frac{1}{120}(\delta_1^2+\delta_2^2)-\delta_1^2\delta_2^2}. \tag{20}$$

Пусть теперь в формуле (19)

$$\left.\begin{array}{l} A_{ij}=\overset{(n_1)}{A_i}\overset{(n_2)}{A_j},\ A_{i0}=-t_2\overset{(n_1)}{A_i},\ A_{i,n_2+1}=-s_2\overset{(n_1)}{A_i},\\ A_{0j}=-t_1\overset{(n_2)}{A_j},\ A_{n_1+1,j}=-s_1\overset{(n_2)}{A_j}\quad (i=1,\ldots,n_1;\ j=1,\ldots,n_2);\\ A=0{,}5;\ A_{n_1+1,0}=s_1t_2-0{,}25;\ A_{0,n_2+1}=s_2t_1-0{,}25;\ A_{00}=t_1t_2-0{,}25;\\ A_{n_1+1,n_2+1}=s_1s_2-0{,}25, \end{array}\right\} \tag{21}$$

где

$$s_1=\sum_{i=1}^{n_1}\overset{(n_1)}{A_i}\lambda_{1i},\qquad s_2=\sum_{j=1}^{n_2}\overset{(n_2)}{A_j}\lambda_{2j},$$

$$t_1=\sum_{i=1}^{n_1}\overset{(n_1)}{A_i}(1-\lambda_{1i}),\quad t_2=\sum_{j=1}^{n_2}\overset{(n_2)}{A_j}(1-\lambda_{2j}).$$

При таком выборе весов формула (19) точна для любых интегрируемых функций вида $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $y\varphi(x)$, $x\psi(y)$ и, следовательно, она точна для $\varphi_f=-(1-y)f(x,0)-(1-x)f(0,y)-xf(1,y)-yf(x,1)+xf(1,0)+yf(0,1)+(1-x-y)f(0,0)+xy[f(1,1)-f(0,1)-f(1,0)+f(0,0)]$. При этом $f+\varphi_f\in F_{01}$, если $f\in F$. Поэтому к ошибке формулы (19) с весами (21) применимо равенство (10), где надо взять $R(f)=R_{n_1n_2}(f)$, $F_2=F$, $F_1=F_{01}$, откуда и следует решение поставленной задачи.

Итак, для класса функций F среди формул (19) наилучшей является формула с весами (21). Верхняя грань ошибки этой формулы в классе F дается величиной (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Доронин Г. Я., Сб. научн. тр. Днепропетровск. инж.-стр. ин-та, № 1—2, 210 (1955).
3. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 249 (1969).
4. Sard A., Linear Approximation, Amer. Math. Soc. Providence, 1963.
5. Schoenberg I. J., Bull. Amer. Math. Soc., 70, No. 1, 143 (1964).
6. Schoenberg I. J., SIAM Numer. Anal., 2, 144 (1965).
7. Schoenberg I. J., SIAM Numer. Anal., 3, 321 (1966).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 11/XII 1969

M. LEVIN

ARVULISE INTEGREERIMISE PARIMATEST FIKSEERITUD SÕLMEDEGA VALEMITEST

Tuletatakse parim valem (1) $W_{L_2}^{(m)}$ klassi funktsioonidele, mis rahuldavad ka lisatingimust (2), samuti $W_{L_2}^{(2r)}$ klassi funktsioonidele (6).

Uuritakse nende parimate valemite (1) ja (13) vahelist seost. Tulemus esitatakse teoreemina 2.

Ühe klassi funktsioonidele tuletatakse parim valem (19).

M. LEVIN

ABOUT THE BEST FORMULAE OF APPROXIMATE INTEGRATION WITH FIXED POINTS

The best formula (1) has been constructed for the class of functions $W_{L_2}^{(m)}$ satisfying the condition (2), and for the class $W_{L_2}^{(2r)}$ (6). The connection between the best formulae (1) and (13) has been found. The best formula (19) for one of the classes has been derived.