EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.2.02

И. ПЕТЕРСЕН

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МЕРЫ ЧЕБЫШЕВА НА n-МЕРНОМ ШАРЕ

Пусть P_d^n — класс всех полиномов степени не выше d от n переменных и S^n — единичный шар n-мерного эвклидового пространства R^n. Если $\xi(dx)$ — некоторая вероятностная мера на S^n, $\int\limits_{S^n} \xi(dx) = 1$, то воспроизводящим ядром класса P_d^n по мере ξ называется [1] функция $K_{d\xi}^n(x, y)$ двух переменных $x, y \in S^n$ такая, что

$$\int\limits_{S^n} K_{d\xi}^n(x, y)\, p(y)\, \xi(dy) = p(x), \qquad K_{dx}^n(\cdot, y) \in P_d^n \tag{1}$$

при любых $p \in P_d^n$ и $x, y \in S^n$. Через $\mu(dx)$ обозначим обобщенную на S^n меру Чебышева [2]

$$\mu(dx) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) dx}{\pi^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{1 - \|x\|^2}}. \tag{2}$$

Целью настоящей статьи является доказательство формулы

$$\max_{x \in S^n} K_{d\mu}^n(x, x) = \frac{n+2d}{n+d} \binom{n+d}{d}. \tag{3}$$

$K_{d\xi}^n(x, x)$ можно интерпретировать [3] как дисперсию оценки наименьших квадратов полинома из P_d^n по непрерывному плану ξ регрессионных экспериментов в смысле Кифера [4–10].

Согласно общей теореме Кифера [8] при каждом d на S^n существует такая мера ξ_d^*, что

$$\min_{\xi} \max_{x \in S^n} K_{d\xi}^n(x, x) = \max_{x \in S^n} K_{d\xi_d^*}^n(x, x) = \dim P_d = \binom{n+d}{d}. \tag{4}$$

Формула (3) имеет, следовательно, с точки зрения непрерывной теории планирования экспериментов следующий смысл: *максимальное значение дисперсии оценки наименьших квадратов полинома степени d от n переменных на основании непрерывного распределения $\mu(dx)$ экспериментов* *в единичном шаре превосходит точно в* $\frac{n+2d}{n+d}$ *раз соответствующий максимум при оптимальном непрерывном плане экспериментов.*

Отметим, что коэффициент $\frac{n+2d}{n+d} < 2$ при всех d и n и приближается к единице при фиксированном d и $n \to \infty$. Для $n = 1$ формула (3) была получена в [11] и для $n = 2$, $d \leqslant 8$ в [12].

Доказательство формулы (3) осуществляем через последовательность лемм.

Пусть $\bar{S}^{n+1}$ — сфера в R^{n+1}, т. е. множество точек $u \in R^{n+1}$ с $\|u\| = 1$, и пусть $H^{n+1,l}$ — класс всех гармонических однородных полиномов степени l от $n+1$ переменных. Обозначим через $K_\nu^{n+1,l}(u, v)$ воспроизводящее ядро класса $H^{n+1,l}$ по равномерной мере $\nu(du)$ на $\bar{S}^{n+1}$. Как известно [13]

$$\dim H^{n+1,l} = \frac{n+2l-1}{n+l-1}\binom{n+l-1}{l}. \tag{5}$$

Лемма 1. $K_\nu^{n+1,l}(u, u) \equiv \dim H^{n+1,l}$.

Доказательство. Пусть G — группа всех вращений R^{n+1} вокруг начала координат и $h \in H^{n+1,l}$. По определению $K_\nu^{n+1,l}(u, v)$ имеем

$$\int_{\bar{S}^{n+1}} K_\nu^{n+1,l}(u, v)\, h(v)\, \nu(dv) = h(u). \tag{6}$$

При любом $g \in G$ замена $v = g^{-1}v'$, $u = g^{-1}u'$ вследствие инвариантности ν и $\bar{S}^{n+1}$ относительно G переводит (6) в

$$\int_{\bar{S}^{n+1}} K_\nu^{n+1,l}(g^{-1}u', g^{-1}v')\, h(g^{-1}v')\, \nu(dv) = h(g^{-1}u'), \tag{7}$$

где $h(g^{-1}v') = h'(v') \in H^{n+1,l}$ пробегает вместе с h все $H^{n+1,l}$. Следовательно $K_\nu^{n+1,l}(g^{-1}u', g^{-1}v')$ является также воспроизводящим ядром для $H^{n+1,l}$, но так как $\bar{S}^{n+1}$, ν и $H^{n+1,l}$ определяют воспроизводящее ядро однозначно [1], то

$$K_\nu^{n+1,l}(u, v) = K_\nu^{n+1,l}(gu, gv) \tag{8}$$

при любых $g \in G$ и $u, v \in \bar{S}^{n+1}$. Следовательно,
$K_\nu^{n+1,l}(u, v) = k_\nu^{n+1,l}(\|u - v\|)$ и

$$K_\nu^{n+1,l}(u, u) = \mathrm{const}. \tag{9}$$

Дальше, равномерная мера ν на $\bar{S}^{n+1}$ является единственной мерой, инвариантной относительно G, и так как $H^{n+1,l}$ и $\bar{S}^{n+1}$ также инвариантны относительно G, то по [6] ν оптимальна в смысле минимакса дисперсии и, следовательно,

$$\max_{u \in \bar{S}^{n+1}} K_\nu^{n+1,l}(u, u) = \dim H^{n+1,l}, \tag{10}$$

что вместе с (9) доказывает лемму.

Пусть $u \in R^{n+1}$ и $u = (u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$. Обозначим через ${}^1H^{n+1,l}$ и ${}^2H^{n+1,l}$ подклассы, состоящие соответственно из всех нечетных и четных относительно u_{n+1} полиномов класса $H^{n+1,l}$. Воспроизводящие ядра подклассов ${}^1H^{n+1,l}$ и ${}^2H^{n+1,l}$ по равномерной мере ν на $\bar{S}^{n+1}$ обозначим через ${}^1K_\nu^{n+1,l}$ и ${}^2K_\nu^{n+1,l}$ соответственно.

Лемма 2. $H^{n+1,l} = {}^1H^{n+1,l} \oplus {}^2H^{n+1,l}$,

$$K_\nu^{n+1,l}(u, v) = {}^1K_\nu^{n+1,l}(u, v) + {}^2K_\nu^{n+1,l}(u, v).$$

Доказательство. Пусть $h \in H^{n+1,l}$. Тогда $h(u)$ как полином однозначно разлагается в сумму

$$h(u) = u_{n+1}h_1(u) + h_2(u), \tag{11}$$

где $h_1(u)$ и $h_2(u)$ — четные относительно u_{n+1} полиномы. С другой стороны $\Delta h(u) = 0$, т. е.

$$\Delta[u_{n+1}h_1(u)] + \Delta h_2(u) = 0. \tag{12}$$

Заменяя в (12) u_{n+1} на $-u_{n+1}$, получаем

$$-\Delta[u_{n+1}h_1(u)] + \Delta h_2(u) = 0. \tag{13}$$

Из (12) и (13) имеем $\Delta[u_{n+1}h_1(u)] = 0$ и $\Delta h_2(u) = 0$. Ортогональность $u_{n+1}h_1(u)$ и $h_2(u)$ по равномерной мере очевидна. Первая часть леммы этим доказана. Доказательство второй части следует теперь из известного свойства суммы воспроизводящих ядер [1].

Лемма 3. $\dim {}^2H^{n+1,l} = \dim P^{nl}$, *где* P^{nl} *— класс всех однородных полиномов степени* l *от* n *переменных.*

Доказательство. Пусть $\dim H^{n+1,l} = D(n+1, l)$ и $\dim {}^iH^{n+1,l} = D_i(n+1, l)$, $(i = 1, 2)$. Тогда по лемме 2

$$D(n+1, l) = D_1(n+1, l) + D_2(n+1, l) \tag{14}$$

и по (11)

$$D_1(n+1, l) = D_2(n+1, l-1). \tag{15}$$

Из (14), (15) и (5) следует

$$D_2(n+1, l) = \frac{n+2l-1}{n+l-1}\binom{n+l-1}{l} - D_2(n+1, l-1), \tag{16}$$

что по индукции дает $D_2(n+1, l) = \binom{n+l-1}{l} = \dim P^{nl}$.

Лемма доказана.

Известно, что однородные гармонические полиномы разных степеней ортогональны по равномерной мере на $\bar{S}^{n+1}$ [13]. Поэтому класс H_d^{n+1} всех гармонических полиномов степени не выше d разлагается в ортогональную сумму

$$H_d^{n+1} = \oplus \sum_{l=0}^{d} H^{n+1,l}. \tag{17}$$

Лемма 4. $\dim H_d^{n+1} = \dfrac{n+2d}{n+d}\dbinom{n+d}{d}$.

Доказательство. По (17), (5) и [14]

$$\dim H_d^{n+1} = \sum_{l=0}^{d} \frac{n+2l-1}{n+l-1}\binom{n+l-1}{l} = \sum_{l=0}^{d}\binom{n+l-1}{l} + \sum_{l=1}^{d}\binom{n+l-2}{l-1} =$$

$$= \binom{n+d}{d} + \binom{n+d-1}{d-1} = \frac{n+2d}{n+d}\binom{n+d}{d}.$$

Пусть ${}^1H_d^{n+1}$ и ${}^2H_d^{n+1}$ — классы всех гармонических полиномов степени не выше d соответственно нечетных и четных относительно переменной u_{n+1}. На основании (17) и леммы 2

$$ {}^iH_d^{n+1} = \oplus \sum_{l=0}^{d} {}^iH^{n+1,l} \quad (i = 1, 2), \quad H_d^{n+1} = {}^1H_d^{n+1} \oplus {}^2H_d^{n+1}. \tag{18}$$

Если воспроизводящие ядра по равномерной мере классов ${}^1H_d^{n+1}$, ${}^2H_d^{n+1}$ и H_d^{n+1} обозначить соответственно через ${}^1K_{d\nu}^{n+1}(u, v)$, ${}^2K_{d\nu}^{n+1}(u, v)$ и $K_{d\nu}^{n+1}(u, v)$, то на основании (18)

$$\begin{gathered} {}^iK_{d\nu}^{n+1}(u, v) = \sum_{l=0}^{d} {}^iK_{\nu}^{n+1,l}(u, v) \quad (i = 1, 2), \\ K_{d\nu}^{n+1}(u, v) = {}^1K_{d\nu}^{n+1}(u, v) + {}^2K_{d\nu}^{n+1}(u, v). \end{gathered} \tag{19}$$

Лемма 5. $$\max_{u \in \bar{S}^{n+1}} {}^2K_{d\nu}^{n+1}(u, u) = \frac{n+2d}{n+d}\binom{n+d}{d}.$$

Доказательство. По разложениям (19) и лемме 1

$$K_{d\nu}^{n+1}(u, u) \equiv \dim H_d^{n+1}. \tag{20}$$

Из положительной определенности ядра ${}^1K_{d\nu}^{n+1}(u, v)$ и (19) следует, что при любом $u \in \bar{S}^{n+1}$

$${}^2K_{d\nu}^{n+1}(u, u) \leqslant K_{d\nu}^{n+1}(u, u). \tag{21}$$

Последнее неравенство обращается в равенство при $u_{n+1} = 0$, так как тогда ${}^1K_{d\nu}^{n+1}(u, u) = 0$ как сумма квадратов нечетных относительно u_{n+1} полиномов. Следовательно, $\max\limits_{u \in \bar{S}^{n+1}} {}^2K_{d\nu}^{n+1}(u, u) = \max\limits_{u \in \bar{S}^{n+1}} K_{d\nu}^{n+1}(u, u) \equiv$ $\equiv \dim H_d^{n+1} = \frac{n+2d}{n+d}\binom{n+d}{d}$ по лемме 4. Лемма 5 доказана.

Обозначим через $\bar{S}_+$ множество всех точек $u \in \bar{S}^{n+1}$ с $u_{n+1} \geqslant 0$ и, введя обозначение $x = Pu$, сопоставим каждой точке $u \in \bar{S}_+^{n+1}$ ее проекцию $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^n$. Тогда $u = P^{-1}x$ и

$$u_1 = x_1, \ \ldots, \ u_n = x_n, \ u_{n+1} = \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}. \tag{22}$$

Лемма 6. *Если* $\{h_i(u)\}$ — *ортонормированная по мере* ν *на* $\bar{S}^{n+1}$ *система четных относительно* u_{n+1} *функций, то* $\{h_i(P^{-1}u)\}$ — *ортонормированная по мере* $\mu(dx)$ (см. (2)) *система на* S^n.

Доказательство. Переходим на $\bar{S}^{n+1}$ к полярным координатам:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin\Theta_n \ldots \sin\Theta_2 \sin\Theta_1, \\ u_2 &= \sin\Theta_n \ldots \sin\Theta_2 \cos\Theta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= \sin\Theta_n \cos\Theta_{n-1}, \\ u_{n+1} &= \cos\Theta_n. \end{aligned} \tag{23}$$

Тогда условие ортонормированности $\{h_i(u)\}$ по ν на $\bar{S}^{n+1}$ принимает вид

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_{\bar{S}^{n+1}} h_i(u)\, h_k(u) \sin^{n-1}\Theta_n \ldots \sin\Theta_2\, d\Theta_1 \ldots d\Theta_n = \delta_{ik}. \tag{24}$$

Вследствие четности $h_i(u)h_k(u)$ имеем для интеграла в (24)

$$\int\limits_{\bar{S}^{n+1}} \ldots = 2 \int\limits_{\bar{S}_+^{n+1}} \ldots . \tag{25}$$

Учитывая это, сделаем в (24) замену переменной, полагая

$$\sin\Theta_n = r, \qquad d\Theta_n = \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}. \tag{26}$$

Тогда согласно (22) и (23)

$$\begin{aligned} u_1 &= r\sin\Theta_{n-1}\ldots\sin\Theta_2\sin\Theta_1 = x_1, \\ u_2 &= r\sin\Theta_{n-1}\ldots\sin\Theta_2\cos\Theta_1 = x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= r\cos\Theta_{n-1} \qquad\qquad\qquad = x_n \end{aligned} \tag{27}$$

и вместо (24) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_{S^n} h_i(P^{-1}x)\, h_k(P^{-1}x) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} \sin^{n-2}\Theta_{n-1}\ldots \\ \ldots\sin\Theta_2\, d\Theta_1\ldots d\Theta_{n-1}\, dr = \delta_{ik} \end{aligned} \tag{28}$$

или в декартовых координатах

$$\int\limits_{S^n} h_i(P^{-1}x)\, h_k(P^{-1}x)\, \mu(dx) = \delta_{ik}. \tag{29}$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Преобразование $u = P^{-1}x$ переводит класс ${}^2H_d^{n+1}$ в класс P_d^n.*

Доказательство. Если $h(u) \in {}^2H_d^{n+1}$, то по (22) $h(P^{-1}x)$ — полином от x степени не выше d. Если $\{h_i(u)\}$ — ортонормированный базис ${}^2H_d^{n+1}$, то $\{\tilde{h}_i(P^{-1}x)\}$ по лемме 6 — система линейно независимых полиномов P_d^n, а по лемме 3 и разложению (18) $\dim {}^2H_d^{n+1} = \dim P_d^n$. Следовательно, P отображает ${}^2H_d^{n+1}$ на весь P_d^n. Лемма доказана.

Лемма 8. *Ядро ${}^2K_{d\nu}^{n+1}(P^{-1}x, P^{-1}y)$ является воспроизводящим ядром для класса P_d^n по мере $\mu(dx)$:*

$${}^2K_{d\nu}^{n+1}(P^{-1}x, P^{-1}y) = K_{d\mu}^n(x, y). \tag{30}$$

Доказательство. Лемма непосредственно следует из лемм 6 и 7.

Формула (3), в свою очередь, следует теперь из лемм 8 и 5.

Отметим, что по формуле (30) можно в явном виде выписать $K_{d\mu}^n(x, y)$, так как ${}^2K_{d\nu}^{n+1}(u, v)$ легко построить на основании известного канонического базиса [13] для гармонических полиномов $n+1$ переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aronszajn N., Trans. Amer. Math. Soc., **68**, 337 (1950).
2. Чебышев П. Л., Сочинения, т. 2, Изд. АН СССР, 1947.
3. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 404 (1969).
4. Kiefer J., J. Roy. Statist. Soc. B, **21**, 272 (1959).
5. Kiefer J., Wolfowitz J., Ann. Math. Statistics, **30**, 271 (1959).
6. Kiefer J., Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statistics and Prob., **1**, 381 (1961).
7. Kiefer J., Ann. Math. Statistics, **29**, 675 (1958).
8. Kiefer J., Wolfowitz J., Canad. J. Math., **12**, 363 (1960).
9. Kiefer J., Ann. Math. Statistics, **32**, 298 (1961).
10. Farrell R. H., Kiefer J., Wolbran A., Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Statistics and Prob., **1**, 113 (1967).
11. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 410 (1969).
12. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 57 (1970).
13. Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965.
14. Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, М.—Л., 1951.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/X 1969

I. PETERSEN

ÜHEST TŠEBÕŠEVI MÕÕDU OMADUSEST *n*-DIMENSIOONILISEL KERAL

Olgu $K^n_{d\xi}(x, y)$ kõigi d-astme n-muutuja polünoomide klassi taastav tuum n-dimensioonilisel ühikkeral S^n tõenäosusmõõdu $\xi(dx)$ suhtes ja $\mu(dx)$ — Tšebõševi mõõt (2) keral S^n.

Tõestatakse, et

$$\max_{x\in S^n} K^n_{d\mu}(x, x) = \frac{n+2d}{n+d} \min_{\xi} \max_{x\in S^n} K^n_{d\xi}(x, x).$$

I. PETERSEN

ON A PROPERTY OF THE TSCHEBYCHEFF MEASURE ON THE *n*-DIMENSIONAL BALL

Let $K^n_{d\xi}(x, y)$ be the reproducing kernel on the unit ball $S^n \subset R^n$ of the class of all polynomials of degree $\leqslant d$ in n variables corresponding to a probability measure $\xi(dx)$ on S^n and let $\mu(dx)$ be the Tschebycheff measure on S^n defined by (2). It is shown that

$$\max_{x\in S^n} K^n_{d\mu}(x, x) = \frac{n+2d}{n+d} \min_{\xi} \max_{x\in S^n} K^n_{d\xi}(x, x).$$