EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.2.01

И. ПЕТЕРСЕН

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРУГА С ВЕСОМ $(1-r^2)^{-1/2}$

Приводятся модификации кубатурных формул Л. Канторовича, Л. Люстерника и И. Мысовских к случаю с весом $(1-r^2)^{-1/2}$.

В связи с применением метода воспроизводящих ядер [1-3] при идентификации полиномов двух переменных на единичном круге $Q = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1\}$ представляют интерес кубатурные формулы вида

$$\iint\limits_Q f(x,y)\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i,y_i), \tag{1}$$

имеющие при заданной алгебраической точности n как можно меньше узлов. Для постоянного веса один способ построения таких формул указан Л. Канторовичем [4]. Л. Люстерник [5] и И. Мысовских [6] получили для постоянного веса формулы, имеющие несколько меньше узлов, чем формулы Л. Канторовича. Приведем модификации всех этих формул к случаю (1).

Формулы типа Л. Канторовича. Пусть $v_1^{(p)}, \ldots, v_p^{(p)}$ — все p положительных корней полинома Лежандра* $P_{2p}(v)$ степени $2p$ и $A_t^{(p)}$ $(t=1,2,\ldots,p)$ — соответствующие коэффициенты Кристоффеля [7]. Обозначим

$$r_t^{(p)} = \sqrt{1-[v_t^{(p)}]^2} \quad (t=1,\ 2,\ \ldots,\ p). \tag{2}$$

Тогда формула

$$\iint\limits_Q f(x,y)\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{\pi}{2p}\sum_{t=1}^{p} A_t^{(p)} \sum_{s=1}^{4p} f(x_{st},y_{st}) \tag{3}$$

имеет алгебраическую точность $n=4p-1$, если $(x_{st},\ y_{st})$ — вершины правильного $4p$-угольника, вписанного в круг радиуса $r_t^{(p)}$ с центром в начале координат.

Приведем численные значения $r_t^{(p)}$ и $A_t^{(p)}$ для $p=1,2,3,4$.

$r_1^{(1)} = 0{,}816\,497$ $\quad A_1^{(1)} = 1{,}000\,000$ $\quad r_1^{(2)} = 0{,}508\,374$ $\quad A_1^{(2)} = 0{,}347\,855$

$r_2^{(2)} = 0{,}940\,432$ $\quad A_2^{(2)} = 0{,}652\,145$

$r_1^{(3)} = 0{,}361\,240$ $\quad A_1^{(3)} = 0{,}171\,324$ $\quad r_1^{(4)} = 0{,}279\,004$ $\quad A_1^{(4)} = 0{,}101\,229$

* Все ортогональные полиномы подразумеваются относящимися к интервалу $[-1;\ +1]$.

$r_2^{(3)} = 0{,}750\,201 \quad A_2^{(3)} = 0{,}360\,762 \quad r_2^{(4)} = 0{,}604\,419 \quad A_2^{(4)} = 0{,}222\,381$

$r_3^{(3)} = 0{,}971\,113 \quad A_3^{(3)} = 0{,}467\,914 \quad r_3^{(4)} = 0{,}850\,774 \quad A_3^{(4)} = 0{,}313\,707$

$r_4^{(4)} = 0{,}983\,032 \quad A_4^{(4)} = 0{,}362\,684$

Пусть теперь $v_1^{(p)}, \ldots, v_p^{(p)}$ — все p положительных корней полинома Лежандра $P_{2p+1}(v)$ и $A_t^{(p)}$ $(t = 1, 2, \ldots, p)$ — соответствующие коэффициенты Кристоффеля, но корень $v_{p+1}^{(p)} = 0$, а $A_{p+1}^{(p)}$ — соответствующий этому корню коэффициент Кристоффеля, умноженный на $1/2$. Обозначим

$$r_t^{(p)} = \sqrt{1 - [v_t^{(p)}]^2} \quad (t = 1, 2, \ldots, p+1). \tag{4}$$

Тогда формула

$$\iint\limits_Q f(x, y) \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{\pi}{2p+1} \sum_{t=1}^{p+1} A_t^{(p)} \sum_{s=1}^{4p+2} f(x_{st}, y_{st}) \tag{5}$$

имеет алгебраическую точность $n = 4p + 1$, если (x_{st}, y_{st}) — вершины правильного $(4p+2)$-угольника, вписанного в круг радиуса $r_t^{(p)}$ с центром в начале координат.

При $p = 1, 2, 3, 4$ численные значения $r_t^{(p)}$ и $A_t^{(p)}$ для формулы (5) следующие:

$r_1^{(1)} = 0{,}632\,455 \quad A_1^{(1)} = 0{,}555\,556 \quad r_1^{(2)} = 0{,}422\,893 \quad A_1^{(2)} = 0{,}236\,927$

$r_2^{(1)} = 1 \quad A_2^{(1)} = 0{,}444\,444 \quad r_2^{(2)} = 0{,}842\,645 \quad A_2^{(2)} = 0{,}478\,629$

$r_3^{(2)} = 1 \quad A_3^{(2)} = 0{,}284\,444$

$r_1^{(3)} = 0{,}314\,731 \quad A_1^{(3)} = 0{,}129\,485 \quad r_1^{(4)} = 0{,}250\,331 \quad A_1^{(4)} = 0{,}081\,274$

$r_2^{(3)} = 0{,}670\,918 \quad A_2^{(3)} = 0{,}279\,706 \quad r_2^{(4)} = 0{,}548\,682 \quad A_2^{(4)} = 0{,}180\,648$

$r_3^{(3)} = 0{,}913\,942 \quad A_3^{(3)} = 0{,}381\,830 \quad r_3^{(4)} = 0{,}789\,795 \quad A_3^{(4)} = 0{,}260\,611$

$r_4^{(3)} = 1 \quad A_4^{(3)} = 0{,}208\,980 \quad r_4^{(4)} = 0{,}945\,970 \quad A_4^{(4)} = 0{,}312\,347$

$r_5^{(4)} = 1 \quad A_5^{(4)} = 0{,}165\,120$

Формула типа Л. Люстерника. Пусть $v_1^{(p)}, \ldots, v_p^{(p)}$ — все p корней полинома Якоби $P_p^{(-1/2,\,1)}(v)$, а $K_t^{(p)}$ — соответствующие коэффициенты Кристоффеля:

$$K_t^{(p)} = \frac{4\sqrt{2}\,(p+1)}{(2p+1)\,(1 - [v_t^{(p)}]^2)\,[P_p^{(-1/2,\,1)\prime}(v_t^{(p)})]^2}. \tag{6}$$

При $t = 1, 2, \ldots, p$ введем обозначения:

$$r_t^{(p)} = \sqrt{\frac{1 + v_t^{(p)}}{2}}, \quad B_t^{(p)} = \frac{\sqrt{2}\,K_t^{(p)}}{4(1 + v_t^{(p)})} \tag{7}$$

и

$$B_0^{(p)} = 1 - \sum_{t=1}^{p} B_t^{(p)}. \tag{8}$$

Тогда формула

$$\iint_Q f(x,y)\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi\left[B_0^{(p)} f(0,0) + \frac{1}{4p+2}\sum_{t=1}^{p} B_t^{(p)} \sum_{s=1}^{4p+2} f(x_{st}, y_{st})\right]. \tag{9}$$

имеет алгебраическую точность $n = 4p+1$, если (x_{st}, y_{st}) — вершины правильного $(4p+2)$-угольника, вписанного в круг радиуса $r_t^{(p)}$ вокруг начала координат.

Радиусы $r_t^{(p)}$ и коэффициенты $B_t^{(p)}$ имеют для формулы (9) при $p = 1, 2, 3, 4$ следующие значения:

$r_1^{(1)} = 0{,}894\,427$	$B_1^{(1)} = 0{,}833\,333$	$r_1^{(2)} = 0{,}643\,965$	$B_1^{(2)} = 0{,}378\,475$
		$r_2^{(2)} = 0{,}958\,459$	$B_2^{(2)} = 0{,}554\,858$
$r_1^{(3)} = 0{,}489\,968$	$B_1^{(3)} = 0{,}210\,704$	$r_1^{(4)} = 0{,}393\,011$	$B_1^{(4)} = 0{,}133\,306$
$r_2^{(3)} = 0{,}806\,158$	$B_2^{(3)} = 0{,}341\,123$	$r_2^{(4)} = 0{,}673\,953$	$B_2^{(4)} = 0{,}224\,889$
$r_3^{(3)} = 0{,}977\,852$	$B_3^{(3)} = 0{,}412\,459$	$r_3^{(4)} = 0{,}878\,401$	$B_3^{(4)} = 0{,}292\,043$
		$r_4^{(4)} = 0{,}986\,247$	$B_4^{(4)} = 0{,}327\,540$

Формула типа И. Мысовских. Пусть $v_1^{(p)}, \ldots, v_{p-1}^{(p)}$ — все $p-1$ корней полинома Якоби $P_{p-1}^{(-1/2,\,2)}(v)$, а $L_t^{(p-1)}$ — соответствующие коэффициенты Кристоффеля:

$$L_t^{(p)} = \frac{16\sqrt{2}\,p(p+1)}{(2p-1)(2p+1)\left(1-[v_t^{(p)}]^2\right)\left[P_{p-1}^{(-1/2,\,2)'}(v_t^{(p)})\right]^2}. \tag{10}$$

Обозначим при $t = 1, 2, \ldots, p-1$:

$$r_t^{(p)} = \sqrt{\frac{1+v_t^{(p)}}{2}}, \quad C_t^{(p)} = \frac{\sqrt{2}\,L_t^{(p)}}{32p(1+v_t^{(p)})^2}. \tag{11}$$

Пусть, далее,

$$\gamma_0 = \frac{1}{4} - (p-1)\sum_{t=1}^{p-1} C_t^{(p)}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{6} - (p-1)\sum_{t=1}^{p-1} C_t^{(p)}[r_t^{(p)}]^2,$$
$$\gamma_j = \frac{(2j)!!}{4p(2j+1)!!}, \quad j = 2, 3, \ldots, 2p-1. \tag{12}$$

Пусть $u_1^{(p)}, \ldots, u_p^{(p)}$ — корни алгебраического уравнения

$$u^p + a_{p-1}u^{p-1} + \ldots + a_1 u + a_0 = 0, \tag{13}$$

коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ которого определены из линейной системы уравнений

$$\sum_{i=0}^{p-1} \gamma_{i+k} a_i + \gamma_{p+k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{14}$$

Пусть, наконец,

$$R_k^{(p)} = \sqrt{u_k^{(p)}} \quad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{15}$$

и величины $D_1^{(p)}, \ldots, D_p^{(p)}$ определены из линейной системы

$$\sum_{k=1}^{p} D_k^{(p)} [u_k^{(p)}]^l = \gamma_l, \quad l = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{16}$$

Тогда формула

$$\iint_Q f(x, y) \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \\ = 2\pi \left[\sum_{t=1}^{p-1} C_t^{(p)} \sum_{s=1}^{4p-4} f(x_{st}, y_{st}) + \sum_{k=1}^{p} D_k^{(p)} \sum_{i=1}^{4} f(x_{ik}, y_{ik})\right] \tag{17}$$

имеет алгебраическую точность $n = 4p - 1$, если (x_{st}, y_{st}) — не лежащие на координатных осях $(4p - 4)$ вершины правильного $4p$-угольника, вписанного в круг радиуса $r_t^{(p)}$, и четыре вершины которого лежат на координатных осях, а (x_{ik}, y_{ik}) — точки пересечения с координатными осями окружности радиуса $R_k^{(p)}$, проведенной вокруг начала координат.

При $p = 1$ формула (17) сводится к формуле (3). Для $p = 2, 3, 4$ параметры $r_t^{(p)}$, $C_t^{(p)}$, $R_k^{(p)}$ и $D_k^{(p)}$ имеют следующие значения:

$r_1^{(2)} = 0{,}925\,820$	$C_1^{(2)} = 0{,}090\,741$	$R_1^{(2)} = 0{,}506\,087$	$D_1^{(2)} = 0{,}086\,003$
		$R_2^{(2)} = 0{,}955\,357$	$D_2^{(2)} = 0{,}073\,256$
$r_1^{(3)} = 0{,}719\,255$	$C_1^{(3)} = 0{,}031\,670$	$R_1^{(3)} = 0{,}354\,350$	$D_1^{(3)} = 0{,}040\,949$
$r_2^{(3)} = 0{,}968\,100$	$C_2^{(3)} = 0{,}040\,949$	$R_2^{(3)} = 0{,}816\,497$	$D_2^{(3)} = 0{,}032\,143$
		$R_3^{(3)} = 0{,}982\,520$	$D_3^{(3)} = 0{,}031\,670$
$r_1^{(4)} = 0{,}572\,582$	$C_1^{(4)} = 0{,}014\,346$	$R_1^{(4)} = 0{,}269\,507$	$D_1^{(4)} = 0{,}023\,444$
$r_2^{(4)} = 0{,}841\,276$	$C_2^{(4)} = 0{,}020\,175$	$R_2^{(4)} = 0{,}699\,963$	$D_2^{(4)} = 0{,}017\,720$
$r_3^{(4)} = 0{,}982\,039$	$C_3^{(4)} = 0{,}023\,316$	$R_3^{(4)} = 0{,}918\,534$	$D_3^{(4)} = 0{,}021\,494$
		$R_4^{(4)} = 0{,}996\,839$	$D_4^{(4)} = 0{,}013\,830$

Соотношение между количеством узлов N квадратурной формулы и ее алгебраической точностью n характеризуется эффективностью [8] формулы, т. е. отношением E числа коэффициентов полинома степени n к числу степеней свободы квадратурной формулы. Для приведенных четырех квадратурных формул (3), (5), (9) и (17) эффективности эти следующие:

$$E_{(3)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6p}, \qquad E_{(5)}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$
$$E_{(9)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad E_{(17)}=\frac{2}{3}+\frac{5}{6p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right). \tag{18}$$

Отметим, что $E=1$ для формулы (9) при $p=1,2$ и для формулы (16) при $p=2$. В остальных случаях $E<1$ и $E\to\frac{2}{3}$ при $p\to\infty$.

Приведенные выше численные значения параметров квадратурных формул вычислены М. Каролин и Э. Вийкман, которым автор приносит свою искреннюю признательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петерсен И., Автоматика и телемеханика, № 6, 95 (1969).
2. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 403 (1969).
3. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 57 (1970).
4. Канторович Л. В., Тр. Матем. ин-та АН СССР, **28**, 3 (1949).
5. Люстерник Л. А., ДАН СССР, **62**, 449 (1948).
6. Мысовских И. П., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **4**, 3 (1964).
7. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1967.
8. Hammer P. C., В сб.: On Numerical Approximation, R. E. Langer, edit., Madison, Univ. Wisconsin Press, 1959, p. 99.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9/VII 1969

I. PETERSEN

KUBATUURIVALEMID RINGIL KAALUGA $(1-r^2)^{-1/2}$

Konstantse kaalu puhul tuntud kubatuurivalemid ringil [4–6] modifitseeritakse kaalu $(1-r^2)^{-1/2}$ juhule.

I. PETERSEN

NUMERICAL INTEGRATION FORMULAS OVER THE UNIT CIRCLE WITH THE WEIGHT $(1-r^2)^{-1/2}$

The known integration formulas [4–6] for constant weight over the unit circle are modified to the case of the weight function $(1-r^2)^{-1/2}$.