EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2
https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.2.16

М. ЛЕВИН

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ МАРКОВА

M. LEVIN. ÜKS EKSTREMAALÜLESANNE MARKOVI KVADRATUURVALEMI JAOKS

M. LEVIN. EINE EXTREMALAUFGABE FÜR MARKOVS QUADRATURFORMEL

Пусть $L_2^{(2)}$ множество функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[0;1]$ абсолютно-непрерывную производную и удовлетворяющих условию

$$\|f''(x)\|_{L_2} \leqslant M.$$

В настоящей заметке решается следующая экстремальная (в постановке С. Никольского [1]) задача для квадратурной формулы Маркова с двумя фиксированными узлами на концах отрезка интегрирования.

Среди формул вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = Af(0) + \sum_{k=1}^{n} B_k f(x_k) + Cf(1) + R_n(f) \tag{1}$$

выбрать ту (называемую наилучшей), для которой величина

$$R_n = \sup_{f \in L_2^{(2)}} |R_n(f)|$$

принимает наименьшее значение.

Сначала рассмотрим подмножество F функций $f(x)$ из $L_2^{(2)}$, удовлетворяющих дополнительно условию $f(0) = f(1) = 0$.

Для $f(x) \in F$ имеет место просто проверяемое представление

$$f(x) = \int_0^1 f''(t)\,g(x,t)\,dt, \tag{2}$$

где

$$g(x,t) = (x-t)E(x-t) - x(1-t),$$

$$E(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Очевидно и обратное утверждение: для любой $f''(x) \in L_2$ функция $f(x)$, определяемая равенством (2), принадлежит множеству F.

Для $f(x) \in F$ из (1), учитывая (2), получаем

$$R_n(f) = \int_0^1 f''(t)\,K(t)\,dt, \tag{3}$$

где

$$K(t) = \frac{t(t-1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} B_k g(x_k, t).$$

Применяя к (3) неравенство Буняковского, имеем

$$|R_n(f)| \leqslant M \cdot \|K(x)\|_{L_2}. \tag{4}$$

Пусть

$$\varphi(x) = M \|K(x)\|_{L_2}^{-1} \cdot \int_0^1 K(t) g(x, t) \, dt.$$

Так как $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi''(x) = M \cdot \|K(x)\|_{L_2}^{-1} \cdot K(x)$, $\|\varphi''(x)\|_{L_2} = M$, то $\varphi(x) \in F$. Но для функции $\varphi(x)$, как это видно из (3), неравенство (4) превращается в равенство. Поэтому

$$\sup_{f \in F} |R_n(f)| = M \cdot \|K(x)\|_{L_2}. \tag{5}$$

Теперь найдем числа x_k, B_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, при которых величина

$$U = \|K(x)\|_{L_2}^2$$

(а вместе с ней и величина (5)) принимает наименьшее значение.

Из того, что искомые числа должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial B_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

вытекает, что они должны удовлетворять и следующим уравнениям:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} K(t) \, dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(t) \, t \, dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{6}$$

$$\int_0^{x_1} K(t) \, t \, dt = 0, \tag{7}$$

$$\int_{x_n}^{1} K(t)(1-t) \, dt = 0. \tag{8}$$

Из определения функции $K(t)$ и равенств (6) следует, что в случае наилучшей для множества F формулы (1) функция $K(t)$ на каждом отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ есть приведенный к этому отрезку многочлен Лежандра со старшим членом $\frac{1}{2}t^2$. Кроме того, на отрезках $[0; x_1]$ и $[x_n; 1]$ функция $K(t)$ имеет соответственно вид

$$\frac{t^2}{2} - pt \quad \text{и} \quad \frac{t(t-1)}{2} + (1-t)q,$$

где, согласно (7) и (8),

$$p = \frac{3}{8} x_1 \quad \text{и} \quad q = \frac{1 + 3x_n}{8}.$$

Учитывая все это, для наилучшей формулы (для множества F) получим

$$U = \int_0^{x_1} K^2(t)\,dt + \int_{x_n}^{1} K^2(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{x_1^5 + (1-x_n)^5}{320} + \frac{1}{720} \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^5. \tag{9}$$

Отсюда и из условия, что величина U должна иметь наименьшее значение, обычными методами математического анализа находим искомые узлы:

$$x_k = 2\varepsilon \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + k - 1 \right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

где

$$\varepsilon = \left[2 \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} + n - 1 \right) \right]^{-1}. \tag{11}$$

Подставляя значения (10) в (9), получим наименьшее значение

$$U = \frac{\varepsilon^4}{45}. \tag{12}$$

Так же как и в [2], исходя из равенств

$$B_k = K'(x_k - 0) - K'(x_k + 0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

найдем значения коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} B_1 = B_n &= \left(1 + \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \cdot \varepsilon, \\ B_k &= 2\varepsilon \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1). \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

Таким образом, для множества F наилучшая формула (1) имеет узлы (10) и коэффициенты (13). Учитывая (12), имеем по (5) для этой формулы

$$\sup_{f \in F} |R_n(f)| = \frac{M\varepsilon^2}{3\sqrt{5}}.$$

Пусть теперь в формуле (1)

$$A = C = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\varepsilon, \tag{14}$$

а x_k и B_k вычислены по (10) и (13). Проверка показывает, что формула (1) точна для любого многочлена первой степени. Поэтому для нее

$$R_n(f(x)) = R_n(f(x) - (1-x)\,f(0) - xf(1)),$$

где при $f(x) \in L_2^{(2)}$ будет $f(x) - (1-x)\,f(0) - xf(1) \in F$.

Значит для полученной формулы

$$\sup_{f \in L_2^{(2)}} |R_n(f)| \leqslant \sup_{f \in F} |R_n(f)|.$$

Кроме того (так как $F \subset L_2^{(2)}$),

$$\sup_{f\in F} |R_n(f)| \leqslant \sup_{f\in L_2^{(2)}} |R_n(f)|.$$

Из последних неравенств следует равенство

$$\sup_{f\in F} |R_n(f)| = \sup_{f\in L_2^{(2)}} |R_n(f)|,$$

а это доказывает следующее утверждение: *среди формул Маркови вида (1) для множества функций $L_2^{(2)}$ наилучшей является формула с узлами (10) и коэффициентами (13) и (14). Для этой формулы*

$$R_n = \frac{M}{12\sqrt{5}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}+n-1\right)^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1967.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 24/XII 1968

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2

А. СЮГИС, М. АЛЛА

ДАТЧИК СПЕКТРОМЕТРА ЯМДР С КОЛЬЦЕВЫМ ОБРАЗЦОМ ДЛЯ КАНАЛА СТАБИЛИЗАЦИИ

A. SÜGIS, M. ALLA. TMTR-SPEKTROMEETRI RESONANTSPEA RÕNGAKUJULISE PROOVIGA STABILISATSIOONIKANALI JAOKS

A. SÜGIS, M. ALLA. A PROBE FOR NMDR SPECTROMETER WITH ANNULAR SAMPLE FOR STABILIZER CHANNEL

Спектрометры ядерного магнитного двойного резонанса (ЯМДР) требуют максимально высокой степени стабилизации отношения ω/H_0 для широкого спектрального диапазона дрейфа, помех и шума, начиная от медленного дрейфа и кончая частотами порядка сотен герц [1].

Внутренний спиновый стабилизатор, работающий от эталона (растворенного в аналитическом образце либо помещенного в капилляр или трубку с двойными стенками) [2, 3], имеет некоторые недостатки, затрудняющие его применение в опытах по ЯМДР:

1. Внутренний стабилизатор не может быть быстродействующим. При увеличении быстродействия сигналы от линий спектра проникают в канал стабилизации, вызывая значительные искажения самих линий. Быстродействие приходится выбирать малым также из-за собственных шумов стабилизатора, так как стационарный сигнал от линии для стабилизации обычно довольно слабый.