ЛИТЕРАТУРА

1. Бокштейн М. Ф., Проблемы прочности в машиностроении, № 8, 73 (1962).
2. Plechata R., Acta Technika ČSAV, № 5, 432 (1964).
3. Kuske A., Einführung in die Spannungsoptik, Stuttgart (1959).
4. Абен Х. К., Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 4, 40 (1964).
5. Aben H. K., Exp. Mech., 6, No. 1, 13 (1966).
6. Шерклифф И., Поляризованный свет, М., 1965.
7. Абен Х., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем., и техн. наук, 13, № 4, 329 (1964).
8. Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961.
9. Kuske A., Abh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math., Phys., Techn., Nr. 4, 115 (1962).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/X 1968

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.2.14

Т. ТОБИАС

О ПРАВИЛАХ ОСТАНОВКИ С МОНОТОННОЙ ФУНКЦИЕЙ РИСКА

T. TOBIAS. PEATUSREEGLITEST MONOTOONSE RISKIFUNKTSIOONI KORRAL

T. TOBIAS. ON OPTIMAL STOPPING RULES WHEN THE RISK FUNCTION IS MONOTONOUS

Предполагается, что при прекращении наблюдений в момент времени n получается выигрыш $x_n = g(y_n) - a_n$, где $g(y)$ — монотонно возрастающая функция. Даются достаточные условия для существования оптимального момента остановки в случае независимых, но неодинаково распределенных наблюдений $y_1, \ldots, y_n, \ldots$. В случае одинаково распределенных случайных величин найдена оптимальная стратегия, которая является обобщением известной стратегии в случае $g(y) = y$.

Пусть $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин и пусть $F_i(y)$ является функцией распределения для y_i. Через $\mathfrak{F}_n$ обозначим σ-кольцо, порожденное семейством $y_1, \ldots, y_n$. Пусть $\mathfrak{T}$ является множеством всевозможных правил остановки, т. е. если $t \in \mathfrak{T}$, то случайная величина t принимает значения из множества натуральных чисел, $\{t \geqslant n\} \in \mathfrak{F}_n$ и $P\{t < \infty\} = 1$. Если последовательность останавливается в момент $t = n$, то получается выигрыш $x_n = g(y_n) - a_n$, где $g(y)$ является непрерывной строго возрастающей функцией, $\lim\limits_{y\to\infty} g(y) = \infty$ (для определенности пусть $g(0) = 0$), а $\{a_n\}$ — возрастающей последовательностью, $a_1 > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Правило t^* называется оптимальным, если $E x_{t^*} = \sup\limits_{t\in\mathfrak{T}} E x_t$. Общие условия для существования t^* даны в работе [1]. Допустим, что для всех i $E|g(y_i)| < \infty$. Тогда легко проверить, что если

$$E\{\sup_n [g(y_n) - a_n]\} < \infty, \tag{1}$$

то в данном случае t^* существует.

Даем условия, гарантирующие выполнение неравенства (1). В нижеследующих леммах предположим, что $P\{y_i \geqslant 0\} = 1$. Это не является ограничением, так как $y_i \leqslant \max(y_i, 0) = y_i^+$ и

$$E\{\sup_n [g(y_n) - a_n]\} \leqslant E\{\sup_n [g(y_n^+) - a_n]\}.$$

Лемма 1 (см. [2], стр. 169). *Если* $y \geqslant 0$ *и* $Ey^\beta < \infty$ $(\beta > 0)$, *то*

$$P\{y \leqslant a\} \geqslant 1 - \frac{Ey^\beta}{a^\beta}. \tag{2}$$

Лемма 2. *Пусть* $Ey_i^\beta = b_i < \infty$ *и* $z = \sup_n [g(y_n) - a_n]$. *Если* $\sum_{i=1}^\infty b_i/[g^{-1}(a_i + u)]^\beta < \infty$ *при любой* $u > 0$, *то* $P\{z < \infty\} = 1$.

Очевидно,

$$G(u) = P\{z \leqslant u\} = P\{\bigcap_{i=1}^\infty [y_i \leqslant g^{-1}(a_i + u)]\} =$$
$$= \prod_{i=1}^\infty F_i[g^{-1}(a_i + u)].$$

По лемме 1 $G(u) \geqslant \prod_{i=1}^\infty \{1 - b_i/[g^{-1}(a_i + u)]^\beta\}$. Но сходимость произведения $\prod_{i=1}^\infty (1 - c_i)$, (где $c_i > 0$) эквивалентна сходимости ряда $\sum_{i=1}^\infty c_i$. Поэтому $\lim_{u \to \infty} G(u) = 1$.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha > 0$. *Если* $\int_0^\infty g^{1/\alpha}(x)\,dF(x) < \infty$, *то* $\prod_{n=1}^\infty F[g^{-1}(n^\alpha)]$ *сходится и наоборот.*

Имеем:

$$\int_0^M \{1 - F[g^{-1}(y^\alpha)]\}dy = 1/\alpha \int_0^{g^{-1}(M^\alpha)} [1 - F(x)]\, g^{1/\alpha - 1}(x)\, g'(x)\, dx =$$

$$= [1 - F(x)]\, g^{1/\alpha}(x) \Big|_0^{g^{-1}(M^\alpha)} + \int_0^{g^{-1}(M^\alpha)} g^{1/\alpha}(x)\, dF(x).$$

Так как $g^{1/\alpha}(M)[1 - F(M)] = g^{1/\alpha}(M) \int_M^\infty dF(x) < \int_M^\infty g^{1/\alpha}(x)\, dF(x)$, то, устремляя $M \to \infty$, получим

$$\int_0^\infty g^{1/\alpha}(x)\, dF(x) = \int_0^\infty \{1 - F[g^{-1}(y^\alpha)]\}\, dy,$$

откуда непосредственно вытекает утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть* $F_i(x)=F(x)$ $(i=1,2,\ldots)$, $a_n=O(n^\alpha)$ $(\alpha>0)$ *и* $Eg^{1/\alpha}(y)<\infty$. *Тогда* $P\{z<\infty\}=1$.

$$G(u)=\prod_{n=1}^{\infty}F[g^{-1}(a_n+u)]\geqslant\prod_{n=1}^{\infty}F[g^{-1}(c_1n^\alpha+u)].$$

По предыдущей лемме произведение справа сходится и поэтому $\lim\limits_{u\to\infty}G(u)=1$.

Эта лемма обобщает соответствующие результаты работы [1], где положено $g(x)=x$.

Лемма 5. *Если ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_i/[g^{-1}(a_i+j)]^\beta \tag{3}$$

сходится, то $Ez<\infty$.

Требование $Ez<\infty$ эквивалентно сходимости произведения

$$\prod_{j=1}^{\infty}G(j)=\prod_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}P\{y_i\leqslant g^{-1}(a_i+j)\}.$$

По лемме 1

$$\prod_{j=1}^{\infty}G(j)\geqslant\prod_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}[1-b_i/[g^{-1}(a_i+j)]^\beta,$$

и по условию последнее произведение сходится.

Сходимость ряда (3) зависит от скорости возрастания функции $g(y)$ и последовательностей a_n и b_n.

Лемма 6. *Пусть* $g(y)=O(y^\gamma)$, $a_n=O(n^\alpha)$ *и* $b_n=O(n^\varkappa)$. *Если*

$$\beta/\gamma-(\varkappa+1)/\alpha>1, \tag{4}$$

то ряд (3) *сходится.*

При данных допущениях сходимость ряда (3) эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty\int\limits_b^\infty x^\varkappa(x^\alpha+y)^{-\beta/\gamma}dx\,dy$. Производя замену переменных $x=r^{2/\alpha}\cos^{2/\alpha}u$, $y=r^2\sin^2 u$, получим

$$\int\limits_a^\infty\int\limits_b^\infty x^\varkappa\,(x^\alpha+y)^{-\beta/\gamma}dx\,dy<M\int\limits_c^\infty r^{1+2\varkappa/\alpha+2/\alpha-2\beta/\gamma}\,dr,$$

откуда вытекает наше утверждение.

Лемма 7. *Пусть* $F_i(x)=F(x)$ $(i=1,2,\ldots)$. *Если* $Eg^{1/\alpha+1}(y)<\infty$, *то* $Ez<\infty$.

Эта лемма (как и лемма 4) является прямым обобщением соответствующего результата работы [1] и доказывается аналогичными рассуждениями.

Рассмотрим функцию выигрыша $\tilde{x}_n = g(m_n) - a_n$, где $m_n = \max(y_1, \ldots, y_n)$. Так как опять

$$G(u) = P\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} [y_i \leqslant g^{-1}(a_n + u)]\} = P\{\bigcap_{i=1}^{\infty} [y_i \leqslant g^{-1}(a_i + u)]\},$$

то оптимальное правило остановки существует при тех же условиях.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема. *Пусть $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, $E|g(y_i)| < \infty$ и пусть $x_n = g(y_n) - a_n$, $\tilde{x}_n = g[\max(y_1, \ldots, y_n)] - a_n$, где $g(y)$ — строго возрастающая непрерывная функция, а a_n — монотонно возрастающая числовая последовательность, $a_1 > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Пусть $Ex_{t^*} = \sup\limits_{t\in\mathfrak{T}} Ex_t$, $Ex_{\tilde{t}^*} = \sup\limits_{t\in\mathfrak{T}} E\tilde{x}_t$. Пусть $Ey_n^{\beta} = b_n = O(n^{\varkappa})$, $g^+(y) = O(y^{\gamma})$, $a_n = O(n^{\alpha})$. Если $\beta/\gamma - (\varkappa+1)/\alpha > 1$, то t^* и $\tilde{t}^*$ существуют.*

Если $P\{y_i \leqslant y\} = F(y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $E[g^+(y)]^{1/\alpha+1} < \infty$, $a_n = O(n^{\alpha})$, то t^* и $\tilde{t}^*$ существуют.

Рассмотрим нахождение оптимального правила в случае одинаково распределенных случайных величин, т. е. $P\{y_i \leqslant y\} = F(y)$.

Лемма. *Пусть $c_n = a_{n+1} - a_n$. Если c_n — монотонно возрастающая последовательность, то $E(\tilde{x}_{n+1}/\mathfrak{F}_n) - \tilde{x}_n$ является монотонно убывающей функцией от n.*

Так как $\tilde{x}_{n+1} = g[m_n + (y_{n+1} - m_n)^+] - a_{n+1}$, то $E(\tilde{x}_{n+1}|\mathfrak{F}_n) - \tilde{x}_n =$

$$= Eg[m_n + (y - m_n)^+] - g(m_n) - c_n = \int\limits_{m_n}^{\infty} [g(y) - g(m_n)]dF(y) - c_n.$$

Утверждение леммы вытекает из того, что

$\partial/\partial m_n[E(\tilde{x}_{n+1}/\mathfrak{F}_n) - \tilde{x}_n] = -g'(m_n)P\{y > m_n\} < 0$, а m_n и c_n — монотонно возрастающие последовательности.

Итак, если, например, $a_n = cn^{\alpha}$ $(\alpha \geqslant 1)$, то мы имеем монотонный случай, подробно изученный в [1]. Обозначим $h(\xi) = \int\limits_{\xi}^{\infty} [g(y) - g(\xi)]dF(y)$, и пусть ξ_n является единственным решением уравнения $h(\xi) = c_n$. Тогда $\tilde{t}^*$ и t^* совпадают и определяются из соотношения

$$t^* = \min_n \{n : m_n \geqslant \xi_n\}.$$

Если $a_n = cn$, то $\xi_n = \xi$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $Ex_{\tilde{t}^*} = Ex_{t^*} = g(\xi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chow Y. S., Robbins H., Z. Wahrscheinlichkeitsth., 2, 33 (1963).
2. Лоэв М., Теория вероятностей, М., 1962.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
5/XI 1968