LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.2.13

Х. АБЕН

ОБ ОДНОМ ВЫВОДЕ ОПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ФОТОУПРУГОСТИ

H. ABEN. ÜHEST FOTOELASTSUSE OPTILISTE VÕRRANDITE TULETAMISEST

H. ABEN. ON A DERIVATION OF THE OPTICAL EQUATIONS OF PHOTOELASTICITY

При анализе оптических явлений в трехмерных фотоупругих моделях наиболее популярными являются геометрический метод, базирующийся на применении сферы Пуанкаре, и аналитический метод, описывающий преобразования поляризации света с помощью унитарных матриц второго порядка. Первый подход в случае метода рассеянного света использует М. Бокштейн [1], а в случае сквозного просвечивания объемных фотоупругих моделей Р. Плехата [2] и А. Куске [3]. Второй метод также нашел применение при различных случаях просвечивания неоднородных фотоупругих моделей [4, 5].

В поляризационной оптике широко распространено также описание преобразований поляризации света матрицами Мюллера [6]. В фотоупругости обычно нет необходимости использовать матрицы Мюллера, так как применяется почти полностью поляризованный свет и анизотропным поглощением света можно пренебречь.

При использовании метода сферы Пуанкаре каждое преобразование поляризации света описывается как вращение сферы вокруг некоторой оси. Отсюда следует, что имеется определенная аналогия между оптическими явлениями в трехмерных фотоупругих моделях и сферической кинематикой. Некоторые аспекты этой аналогии рассматривались в литературе [7]. Цель настоящей заметки — показать, что отмеченную аналогию можно использовать для вывода оптических уравнений фотоупругости из уравнений сферической кинематики.

Рассмотрим вращение твердого тела, имеющего неподвижную точку. Проекции вектора угловой скорости на неподвижные оси x_i обозначаем через ω_i. Величины ω_i связаны с эйлеровыми углами следующими соотношениями [8]:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= (d\psi_2/dt)\cos\psi_1 + (d\psi_3/dt)\sin\psi_2\sin\psi_1,\\
\omega_2 &= (d\psi_2/dt)\sin\psi_1 - (d\psi_3/dt)\sin\psi_2\cos\psi_1,\\
\omega_3 &= d\psi_1/dt + (d\psi_3/dt)\cos\psi_2,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где ψ_i — углы Эйлера (ψ_1 — угол прецессии, ψ_2 — угол нутации, ψ_3 — угол чистого вращения), t — время.

Из соотношений (1) получим

$$\left.\begin{aligned}
d\psi_1/dt &= -\omega_1 \operatorname{ctg}\psi_2 \sin\psi_1 + \omega_2 \operatorname{ctg}\psi_2 \cos\psi_1 + \omega_3,\\
d\psi_2/dt &= \omega_1\cos\psi_1 + \omega_2\sin\psi_1,\\
d\psi_3/dt &= \frac{1}{\sin\psi_2}(\omega_1\sin\psi_1 - \omega_2\cos\psi_1).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Истолковываем вращение твердого тела как вращение сферы Пуанкаре, соответствующее прохождению поляризованного света через объемную фотоупругую модель. В последнем случае мгновенная ось вращения совпадает с главными направлениями оптической анизотропии, которые составляют с неподвижными осями некоторый угол φ, зависящий от координаты z (считаем, что свет распространяется в направлении координаты z). Под скоростью вращения сферы подразумеваем изменение оптической анизотропии Δ по координате z:

$$d\Delta/dz = C(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \tag{3}$$

Здесь C — оптическая постоянная, ε_i — квазиглавные значения компонентов диэлектрического тензора.

Компоненты вектора угловой скорости выражаются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= (d\Delta/dz)\cos 2\varphi, \\ \omega_2 &= (d\Delta/dz)\sin 2\varphi, \\ \omega_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Как показано в работе [7], углами Эйлера вращения сферы Пуанкаре являются характеристические величины унитарной оптической системы $2\alpha_*$, 2γ и $2\alpha_0$. Угол α_0 определяет направление, при котором входящий в фотоупругую модель линейно поляризованный свет выходит из модели также линейно поляризованным. Направление плоскости поляризации выходящего из модели света определяется углом α_*. Направления, определяемые углами α_0 и α_*, называются первичными и вторичными характеристическими направлениями унитарной оптической системы соответственно. Величина 2γ (характеристическая разность фаз) определяет разность фаз между колебаниями по вторичным характеристическим направлениям в точке выхода света.

Производя в уравнениях (2) замену переменных $t \to z$, $\psi_1 \to 2\alpha_*$, $\psi_2 \to 2\gamma$, $\psi_3 \to (-)2\alpha_0$ и учитывая соотношения (4), получим дифференциальные уравнения объемной фотоупругости в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} d\alpha_*/dz &= (d\Delta/2dz)\operatorname{ctg} 2\gamma \sin 2(\varphi - \alpha_*), \\ 2d\gamma/dz &= (d\Delta/dz)\cos 2(\varphi - \alpha_*), \\ d\alpha_0/dz &= (d\Delta/2dz)\,(1/\sin 2\gamma)\sin 2(\varphi - \alpha_*). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Численным интегрированием уравнений (5) можно при известном распределении оптической анизотропии в фотоупругой модели (когда известны функции $d\Delta/dz$ и φ) определить характеристические направления и характеристическую разность фаз. Такой метод может в практике оказаться более эффективным, чем интегрирование более простых линейных уравнений, приведенных в статье [4], ибо в последнем случае для определения характеристических величин приходится использовать дополнительные соотношения.

Используя соотношение

$$\alpha_* - \alpha_0 = \alpha, \tag{6}$$

где α — угол «вращения» плоскости поляризации, получим вместо последнего уравнения системы (5) следующее уравнение для угла α:

$$d\alpha/dz = -(d\Delta/dz)\operatorname{tg}\gamma \sin 2(\varphi - \alpha_*). \tag{7}$$

Отметим, что первые два уравнения системы (5) и уравнение (7) без вывода приведены в работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокштейн М. Ф., Проблемы прочности в машиностроении, № 8, 73 (1962).
2. Plechata R., Acta Technika ČSAV, № 5, 432 (1964).
3. Kuske A., Einführung in die Spannungsoptik, Stuttgart (1959).
4. Абен Х. К., Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 4, 40 (1964).
5. Aben H. K., Exp. Mech., 6, No. 1, 13 (1966).
6. Шерклифф И., Поляризованный свет, М., 1965.
7. Абен Х., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем., и техн. наук, 13, № 4, 329 (1964).
8. Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961.
9. Kuske A., Abh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math., Phys., Techn., Nr. 4, 115 (1962).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/X 1968

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2

Т. ТОБИАС

О ПРАВИЛАХ ОСТАНОВКИ С МОНОТОННОЙ ФУНКЦИЕЙ РИСКА

T. TOBIAS. PEATUSREEGLITEST MONOTOONSE RISKIFUNKTSIOONI KORRAL
T. TOBIAS. ON OPTIMAL STOPPING RULES WHEN THE RISK FUNCTION IS MONOTONOUS

Предполагается, что при прекращении наблюдений в момент времени n получается выигрыш $x_n = g(y_n) - a_n$, где $g(y)$ — монотонно возрастающая функция. Даются достаточные условия для существования оптимального момента остановки в случае независимых, но неодинаково распределенных наблюдений $y_1, \ldots, y_n, \ldots$. В случае одинаково распределенных случайных величин найдена оптимальная стратегия, которая является обобщением известной стратегии в случае $g(y) = y$.

Пусть $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин и пусть $F_i(y)$ является функцией распределения для y_i. Через $\mathfrak{F}_n$ обозначим σ-кольцо, порожденное семейством $y_1, \ldots, y_n$. Пусть $\mathfrak{T}$ является множеством всевозможных правил остановки, т. е. если $t \in \mathfrak{T}$, то случайная величина t принимает значения из множества натуральных чисел, $\{t \geqslant n\} \in \mathfrak{F}_n$ и $P\{t < \infty\} = 1$. Если последовательность останавливается в момент $t = n$, то получается выигрыш $x_n = g(y_n) - a_n$, где $g(y)$ является непрерывной строго возрастающей функцией, $\lim\limits_{y \to \infty} g(y) = \infty$ (для определенности пусть $g(0) = 0$), а $\{a_n\}$ — возрастающей последовательностью, $a_1 > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$. Правило t^* называется оптимальным, если $E x_{t^*} = \sup\limits_{t \in \mathfrak{T}} E x_t$. Общие условия для существования t^* даны в работе [1]. Допустим, что для всех i $E|g(y_i)| < \infty$. Тогда легко проверить, что если

$$E\{\sup_n [g(y_n) - a_n]\} < \infty, \tag{1}$$

то в данном случае t^* существует.