EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.2.09

А. ШПИЛЕВСКИЙ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕВОЗМОЖНОСТИ ПРОЦЕССА $\gamma+Z\to Z+\nu+\tilde{\nu}$

С помощью нового метода расчета и привлечения соображений, связанных с γ_5-инвариантностью, доказывается, в противоположность имеющимся в литературе утверждениям, что процесс $\gamma+Z\to Z+\nu+\tilde{\nu}$ невозможен. Детально анализируется противоречивость метода Розенберга, давшего известный расчет этого процесса.

§ 1. Введение

После замечания Б. Понтекорво [1] о выдающейся роли в астрофизике прямого электронно-нейтринного слабого взаимодействия появился целый ряд работ, эксплуатирующих это взаимодействие. В их числе находится расчет [2–4] процесса

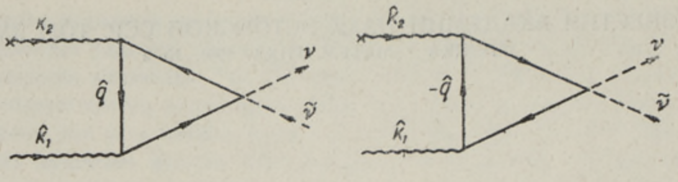
$$\gamma+Z\to Z+\nu+\tilde{\nu}, \tag{1}$$

для которого было получено неравное нулю сечение, а Розенберг даже показал [3], что процесс (1) столь же эффективен для энергетических потерь звезд, как и процесс $\gamma+\gamma\to\gamma+\nu+\tilde{\nu}$. Это дало основание включить процесс (1) в список важнейших процессов, обусловливающих нейтринную светимость звезд [5].

Однако тщательный анализ, проведенный ниже (§ 2), показывает, что в действительности слабое взаимодействие в самом низком порядке по G дает нулевую амплитуду для процесса (1). Причина ошибочности расчетов, давших отличную от нуля амплитуду, — в неправильном использовании условия градиентной инвариантности, которое накладывается на фейнмановскую амплитуду процесса (1) с целью устранения формально расходящихся членов. В § 3 приведен отличный от [3] метод расчета процесса (1), дающий в результате нулевую амплитуду. В пользу этого же результата в § 4 будут приведены дополнительные соображения, связанные с γ_5-инвариантностью.

§ 2. Анализ расчета Розенберга

Пользуясь оригинальными правилами Фейнмана [6], запишем амплитуду процесса (1) в соответствии с диаграммами и обозначениями, приведенными на рисунке:



$$\mathfrak{M} = (-1)\,(-i\sqrt{4\pi e^2})\,V(\vec{k}_2)\,\frac{G}{\sqrt{2}}\,J^{(\nu)}_{\mu} A_{\mu}, \tag{2}$$

где

$$J^{(\nu)}_{\mu} \equiv \tilde{\nu}\gamma_{\mu}(1+\gamma_5)\nu; \qquad V(\vec{k}_2) \equiv \frac{4\pi Z e^2}{|\vec{k}_2|^2};$$

$$A_{\mu} \equiv 2\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\, Sp\left\{\frac{i}{\hat{q}-\hat{k}_2-m}\,\hat{\varepsilon}_2\,\frac{i}{\hat{q}-m}\,\hat{\varepsilon}_1\,\frac{i}{\hat{q}+\hat{k}_1-m}\,\gamma_{\mu}\gamma_5\right\}. \tag{3}$$

Здесь ε_1, ε_2 — векторы поляризации фотонов, причем $\varepsilon_{2\rho} = \delta_{\rho 0}$.

Для нашего анализа достаточно вычислить $A_{\mu} J^{(\nu)}_{\mu}$, что мы сделаем с помощью параметризации Фейнмана. Тогда

$$\mathfrak{M} \sim A_{\mu} J^{(\nu)}_{\mu} = -4i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{I^{(0)}_{\mu} J^{(\nu)}_{\mu}}{[(q+k_1 x - k_2 y)^2 - Q]^3}, \tag{4}$$

где

$$-Q = -m^2 + 2(k_1 k_2)xy + k_1^2\, x(1-x) + k_2^2\, y(1-y); \tag{5}$$

$$I^{(0)}_{\mu} = Sp(\hat{q} - \hat{k}_2 + m)\,\hat{\varepsilon}_2\,(\hat{q}+m)\,\hat{\varepsilon}_1\,(\hat{q} + k_1^2 + m)\gamma_{\mu}\gamma_5. \tag{6}$$

Прямое вычисление шпура $I^{(0)}_{\mu}$ дает результат*, который мы выпишем, умножив скалярно $I^{(0)}_{\mu}$ на $J^{(\nu)}_{\mu}$:

$$J^{(\nu)}_{\mu} I^{(0)}_{\mu} = -4i\{(q^2-m^2)\,|J^{(\nu)}(q+k_1-k_2)\varepsilon_2\varepsilon_1| + 2(q\cdot\varepsilon_2)\,|J^{(\nu)} q k_1 \varepsilon_1| +$$
$$+ 2(q\cdot\varepsilon_1)\,|J^{(\nu)} q k_2 \varepsilon_2| + (J^{(\nu)}\cdot k_2)\,|q k_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2| -$$
$$- (J^{(\nu)}\cdot\varepsilon_2)\,|q k_1 \varepsilon_1 k_2| + (q k_1)\,|J^{(\nu)} k_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2| - (q\cdot\varepsilon_1)\,|J^{(\nu)} k_2 k_1 \varepsilon_1|\}. \tag{7}$$

Из формулы (4) видим, что удобно сделать сдвиг $q \to q - k_1 x + k_2 y$; тогда, учитывая четность знаменателя в (4), получим

$$\mathfrak{M} \sim A_{\mu} J^{(\nu)}_{\mu} = -16 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{I_{\mu} J^{(\nu)}_{\mu}}{(q^2 - Q)^3}, \tag{8}$$

где

$$I_{\mu} J^{(\nu)}_{\mu} = \tfrac{1}{2} q^2 [(1-3x)\,|J^{(\nu)} k_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1| - (1-3y)\,|J^{(\nu)} k_2 \varepsilon_2 \varepsilon_1|]_1 +$$
$$+ [(Q + k_1^2 x + k_2^2 y - 2m^2)\,(1-x) - y k_2^2]_2 \cdot |J^{(\nu)} k_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1| -$$

* Мы пользуемся представлением и свойствами γ-матриц по книге [7] и применяем символ $|abcd| \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a_{\mu} b_{\nu} c_{\rho} d_{\sigma}$.

$$-[(Q+k_1^2 x + k_2^2 y - 2m^2)(1-y) - xk_1^2]_3 \cdot |J^{(\nu)} k_2 \varepsilon_2 \varepsilon_1| +$$
$$+ 2xy[|J^{(\nu)} \varepsilon_1 k_1 k_2|(\varepsilon_2 \cdot k_1) - |J^{(\nu)} \varepsilon_2 k_1 k_2|(\varepsilon_1 k_2)]_4 =$$
$$= \tfrac{1}{2} q^2 [\ldots]_1 + [\ldots]_2 |J^{(\nu)} k_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1| - [\ldots]_3 |J^{(\nu)} k_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1| + 2xy[\ldots]_4. \tag{9}$$

Как видно из (8) и (9), $\mathfrak{M}$ можно записать так*:

$$\mathfrak{M} \sim J_\mu^{(\nu)} A_\mu = B_1 |J^{(\nu)} k_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1| + B_2 |J^{(\nu)} k_2 \varepsilon_2 \varepsilon_1| +$$
$$+ B_3 (\varepsilon_2 k_1) |J^{(\nu)} k_1 k_2 \varepsilon_1| + B_4 (\varepsilon_1 k_2) |J^{(\nu)} k_1 k_2 \varepsilon_2|, \tag{10}$$

где B_1 и B_2 — формально расходящиеся коэффициенты, а

$$B_3 = - B_4 = i \frac{16\pi^2}{(2\pi)^4} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \frac{xy}{Q}.$$

Теперь наступил тот решающий момент расчета, когда мы можем получить для $\mathfrak{M}$ либо отличный от нуля результат, либо нуль, в зависимости от порядка выполнения математических операций. Следуя Розенбергу [3], поступаем так:

(i) Сначала накладываем на $\mathfrak{M}$ условие градиентной инвариантности, т. е. условие обращения $\mathfrak{M}$ в нуль при заменах $\varepsilon_1 \to k_1$, или $\varepsilon_2 \to k_2$. Это даст два уравнения, из которых расходящиеся коэффициенты B_1 и B_2 выразим через конечные B_3 и B_4. Так мы исключаем расходимости и получаем для $\mathfrak{M}$ выражение

$$\mathfrak{M} \sim J_\mu^{(\nu)} A_\mu = - B_3 [|J^{(\nu)} k_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1| (k_1 k_2) - |J^{(\nu)} k_2 \varepsilon_2 \varepsilon_1| (k_1 k_2)] +$$
$$+ B_3 [|J^{(\nu)} k_1 k_2 \varepsilon_1| (\varepsilon_2 k_1) - |J^{(\nu)} k_1 k_2 \varepsilon_2| (\varepsilon_1 k_2)]. \tag{11}$$

(ii) Затем, применяя к последним двум членам в (11) тождество (см. [3, 10]),

$$|abcd|(ef) + |bcde|(af) + |cdea|(bf) + |deab|(cf) +$$
$$+ |eabc|(df) = 0, \tag{12}$$

вместо (11) получим

$$\mathfrak{M} \sim A_\mu J_\mu^{(\nu)} = B_3 \{k_2^2 |J^{(\nu)} k_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1| - k_1^2 |J^{(\nu)} k_2 \varepsilon_2 \varepsilon_1| + (k_1 + k_2, J^{(\nu)}) |k_1 k_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2|\},$$

откуда, поскольку для процесса (1) фактически $k_1^2 = 0$ и $(k_1 + k_2, J^{(\nu)}) = (k_1 + k_2)_\mu J_\mu^{(\nu)} = 0$, если $m_\nu = 0$ (m_ν — масса нейтрино), получаем результат Розенберга (см. в [3] формулу (19)):

$$\mathfrak{M} \sim J_\mu^{(\nu)} A_\mu = B_3 k_2^2 |J^{(\nu)} k_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1| = k_2^2 B_3 (\vec{J}^{(\nu)} \cdot [\vec{k}_1 \times \vec{\varepsilon}_1]). \tag{13}$$

Но если поступим наоборот, т. е. если

(iii) сначала применим к (10) тождество (12), так что $\mathfrak{M}$ станет

---

* Формула (10) с точностью до постоянных множителей совпадает с формулой (7) в [3], если последнюю свернуть с $\varepsilon_{1\sigma}\, \varepsilon_{2\rho}\, J_\mu^{(\nu)}$ и учесть условия Лоренца $(\varepsilon_1 \cdot k_1) = 0$ и $(\varepsilon_2 \cdot k_2) = 0$.

$$\mathfrak{M} \sim J_\mu^{(\nu)} A_\mu = [B_1 + B_3 k_2^2 + B_3 (k_1 \cdot k_2)] \cdot |J^{(\nu)} k_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1| +$$

$$+ [B_2 - B_3 k_1^2 - B_3 (k_1 k_2)] \cdot |J^{(\nu)} k_2 \varepsilon_2 \varepsilon_1| - B_3 (k_1 + k_2, J^{(\nu)}) |k_1 k_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2|,$$

(iv) а затем наложим условие градиентной инвариантности так, что расходящиеся B_1 и B_2 выразятся через конечные, то для $\mathfrak{M}$ получим

$$\mathfrak{M} \sim J_\mu^{(\nu)} A_\mu = -B_3 (k_1 + k_2, J^{(\nu)}) |k_1 k_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2|. \qquad (14)$$

И в силу $(k_1 + k_2, J^{(\nu)}) = 0$ для $m_\nu = 0$ из (14) имеем не результат Розенберга (13), а $\mathfrak{M} = 0$.

Таким образом, мы пришли к противоречию. Однако ввиду того, что тождество (12) позволяет выделить из градиентно-неинвариантной комбинации слагаемых типа $|J^{(\nu)} k_1 k_2 \varepsilon_1| (\varepsilon_2 k_1)$ градиентно-инвариантные члены типа $(k_1 + k_2, J^{(\nu)}) |k_1 k_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2|$, необходимо применить тождество (12) до операций исключения расходимостей. Розенберг же делал наоборот: накладывая сначала условие градиентной инвариантности, он выразил расходящиеся B_1 и B_2 через конечные коэффициенты, стоявшие при необратившихся в нуль градиентно-неинвариантных членах, и получил неравную нулю амплитуду $\mathfrak{M}$. Логически правильно тождество (12) применять до каких-либо операций исключения членов. Таким образом, результат Розенберга неверен, и фактически амплитуда $\mathfrak{M}$ строго равна нулю в рассматриваемом приближении, что мы подтвердим двумя разными способами в § 3 и 4.

§ 3. Регуляризационный метод расчета

Применим для подсчета $\mathfrak{M}$ регуляризационный метод Паули—Вилларса. Правильная регуляризация для петлеобразных диаграмм обеспечивается следующим вычитанием (см. [8], § 30.2):

$$\operatorname{reg} \mathfrak{M} = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}',$$

где $\mathfrak{M}'$ получаем из $\mathfrak{M}$ простой заменой всюду массы m на M, т. е. $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}|_{m \to M}$. В дальнейшем же M устремляется к ∞. Исходя из (8), запишем:

$$\operatorname{reg} \mathfrak{M} \sim 16 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{I_\mu J_\mu^{(\nu)}}{(q^2 - Q)^3} - \frac{I'_\mu J_\mu^{(\nu)}}{(q^2 - Q')^3} \right),$$

где $Q' = Q|_{m \to M}$ и $I'_\mu = I_\mu|_{m \to M}$. Теперь $\operatorname{reg} \mathfrak{M}$ не содержит расходимостей, что следует прямо из факта $\int q^2 d^4 q \left(\frac{1}{(q^2 - Q)^3} - \frac{1}{(q^2 - Q')^3} \right) = i\pi^2 \ln \frac{Q'}{Q}$. Тогда, используя краткие обозначения, введенные в конце (9), представим $\operatorname{reg} \mathfrak{M}$ для достаточно больших M в виде

$$\operatorname{reg} \mathfrak{M} \sim \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ [\ldots]_1 \ln \frac{M^2}{Q} - |J^{(\nu)} k_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1| \left(\frac{[\ldots]_2}{Q} - 1 \right) + \right.$$

$$\left. + |J^{(\nu)} k_2 \varepsilon_2 \varepsilon_1| \left(\frac{[\ldots]_3}{Q} - 1 \right) - \frac{2xy}{Q} [\ldots]_4 \right\}.$$

Снова воспользуемся тождеством (12) для преобразования $[\ldots]_4$, так что $\operatorname{reg}\mathfrak{M}$ примет вид

$$\operatorname{reg}\mathfrak{M} \sim \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \Big\{ (1-3x)\left(\ln\frac{M^2}{Q}\right)|J^{(\nu)}k_1\varepsilon_2\varepsilon_1| -$$

$$-(1-3y)\left(\ln\frac{M^2}{Q}\right)|J^{(\nu)}k_2\varepsilon_2\varepsilon_1| - \left(\frac{[\ldots]_2}{Q} - 1\right)|J^{(\nu)}k_1\varepsilon_2\varepsilon_1| +$$

$$+\left(\frac{[\ldots]_3}{Q} - 1\right)|J^{(\nu)}k_2\varepsilon_2\varepsilon_1| - \frac{2xy}{Q}(k_2^2 + k_1\cdot k_2)|J^{(\nu)}k_1\varepsilon_2\varepsilon_1| +$$

$$+\frac{2xy}{Q}(k_1^2 + k_1\cdot k_2)|J^{(\nu)}k_2\varepsilon_2\varepsilon_1| + \frac{2xy}{Q}(k_1 + k_2, J^{(\nu)})|k_1 k_2\varepsilon_1\varepsilon_2|\Big\}.$$

Или, вводя последовательно коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_7$ и объединяя подобные члены, получим

$$\operatorname{reg}\mathfrak{M} = (A_1 + A_3 + A_5)|J^{(\nu)}k_1\varepsilon_2\varepsilon_1| + (A_2 + A_4 + A_6)|J^{(\nu)}k_2\varepsilon_2\varepsilon_1| +$$
$$+ A_7(k_1 + k_2, J^{(\nu)})|k_1 k_2\varepsilon_1\varepsilon_2|.$$

Здесь A_1 и A_2 при $M \to \infty$ расходятся. Поэтому наложением условия градиентной инвариантности мы устраняем их так, что $\mathfrak{M}$ принимает окончательно вид

$$\mathfrak{M} = A_7(k_1 + k_2, J^{(\nu)})|k_1 k_2\varepsilon_1\varepsilon_2|,$$

что дает $\mathfrak{M} = 0$ для безмассового нейтрино.

Добавим, кстати, что поскольку приведенные выше доводы справедливы также в случае $k_1^2 = 0$ и $k_2^2 = 0$, т. е. когда оба фотона реальны, то из вышеизложенного автоматически следует выполнение известной теоремы Гелл-Манна [9] о невозможности процесса $\gamma + \gamma \rightleftarrows \nu + \tilde{\nu}$ в локальной теории слабого взаимодействия с безмассовым нейтрино.

§ 4. Соображения, связанные с γ_5-инвариантностью

Невозможность процессов $\gamma + \gamma \to \nu + \tilde{\nu}$ и $\gamma + Z \to Z + \nu + \tilde{\nu}$ доказана выше путем прямого расчета в низших порядках по G и e. Но этот результат, по-видимому, не случаен, а значит ему можно дать обоснование с помощью определенных физических симметрий. Таковыми в нашем случае являются симметрии, связанные с γ_5-преобразованием

$$\psi(x) \to \gamma_5\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to -\bar{\psi}(x)\gamma_5. \tag{15}$$

Действительно, каждый матричный элемент $\mathfrak{M} = \langle \text{out}|\text{in}\rangle = \langle \text{in}|S|\text{in}\rangle$, где S-матрица по определению $S = P[\exp(i\int d^4x L_{\text{int}}(x))]$ дает вклады в соответствии с правилами Фейнмана, должен обладать той же симметрией, что и L_{int}. В случае интересующих нас фотонейтринных процессов $L_{\text{int}} = L_{\text{int}}^{(el)} + L_{\text{int}}^{(w)}$, где $L_{\text{int}}^{(el)}(x) = e\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_e A_\mu(x)$ и $L_{\text{int}}^{(w)} = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\psi}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu][\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_e]$. Очевидно, эти лагранжианы инварианты относительно γ_5-преобразований (15). Тогда, требуя выполнения этой же инвариантности от каждого матричного элемента, легко убедиться, что интересующим нас процессам соответствуют нулевые амплитуды. Покажем это. Опуская для простоты все численные множители, распишем нужный нам матричный элемент в координатном пространстве (нужные диаграммы того же типа, что и рисунок):

$$\mathfrak{M} \sim \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 [\bar{\psi}_\nu (x_3) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_\nu (x_3)] (I_\mu^{(1)} + I_\mu^{(2)}), \tag{16}$$

где

$$I_\mu^{(1)} = Sp[\hat{A}(x_1) S_F(x_1 - x_2) \hat{A}(x_2) S_F(x_2 - x_3) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) S_F(x_3 - x_1)],$$

$$I_\mu^{(2)} = Sp[\hat{A}(x_1) S_F(x_1 - x_3) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) S_F(x_3 - x_2) \hat{A}(x_2) S_F(x_2 - x_1)]$$

и

$$S_F(x-y) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip(x-y)}}{\hat{p} - m} d^4 p.$$

Теперь применим к (16) преобразование (15), причем заметим, что под знаком шпура γ_5-преобразование сводится либо к замене $Sp[(\ldots)] = Sp[\gamma_5(\ldots)\gamma_5]$ с последующим протаскиванием γ_5, например, слева направо, либо к операции симметрии $\gamma_\mu \to -\gamma_\mu$, ибо, как известно, шпур нечетного числа γ-матриц равен нулю и шпур четного числа γ-матриц в прямом порядке равен шпуру тех же γ-матриц, взятых в обратном порядке. Любой из этих двух способов дает $I_\mu^{(2)} = (-1)^3 I_\mu^{(1)}$, т. е. строго $\mathfrak{M} = 0$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность за полезное обсуждение данной работы проф. П. Карду и Х. Ыйглане, а также В. Огиевецкому и И. Полубаринову за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтекорво Б., ЖЭТФ, **36**, 1615 (1959).
2. Матинян С. Г., Цилосани Н. Н., ЖЭТФ, **41**, 1681 (1961).
3. Rosenberg L., Phys. Rev., **129**, 2786 (1963).
4. Marx G., Nagi T., Acta Phys. Hung., **16**, 141 (1963).
5. Ruderman M. A., Reports on Progress in Physics (London), **28**, 411 (1965).
6. Фейнман Р., Квантовая электродинамика, М., 1964.
7. Окунь Л. Б., Слабые взаимодействия элементарных частиц, М., 1963.
8. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантовых полей, М., 1957.
9. Gell-Mann M., Phys. Rev. Lett., **6**, 70 (1961).
10. Шпилевский А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **17**, 484 (1968).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
20/V 1968

A. ŠPILEVSKI

PROTSESSI $\gamma + Z \to Z + \nu + \tilde{\nu}$ VÕIMATUSE TÕESTUS

Uut arvutusmeetodit ja γ_5-invariantsusega seotud kaalutlusi kasutades tõestatakse protsessi $\gamma + Z \to Z + \nu + \tilde{\nu}$ võimatus. Et kirjanduses väidetakse selle protsessi võimalikkust, siis analüüsitakse siin üksikasjaliselt väite põhjenduseks kasutatud Rosenbergi meetodi vastuolulisust.

A. SHPILEVSKI

PROOF OF THE IMPOSSIBILITY OF THE $\gamma + Z \to Z + \nu + \tilde{\nu}$ PROCESS

The impossibility of the $\gamma + Z \to Z + \nu + \tilde{\nu}$ process is proved by means of a new calculation method and consideration connected with γ_5-invariation. A detailed analysis of the contradiction of Rosenberg's calculation is given.