EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.2.07

ЭВЕ ТАММЕТ

ДЕЙСТВИЕ НЕКОМПЕНСИРОВАННОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ОБОЛОЧКИ НА ПОЛЯРИЗАЦИЮ μ-МЕЗОНА В МЕЗОАТОМЕ

Исчерпывающего общего теоретического описания деполяризации μ-мезона в мезоатоме не существует. Наиболее подробно исследована деполяризация мезона спин-орбитальным взаимодействием. Сверхтонкое взаимодействие между мезоном и ядром учитывалось первоначально для состояния 1S [1, 2] и в дальнейшем также для возбужденных состояний [3, 4].

Проблема действия электронной оболочки, обладающей некомпенсированным магнитным моментом, на поляризацию μ-мезона, возникла в экспериментальных исследованиях [5–7]. Парамагнетизм мезоатома может быть обусловлен конфигурацией первоначальной электронной оболочки или может возникать при образовании мезоатома.

Если ядро не обладает спином, то действие электронной оболочки на поляризацию μ-мезона оценивается по формуле $P=\frac{P_0}{3}\left(1+\frac{2}{(2s+1)^2}\right)$ где P_0 — начальная поляризация μ-мезона при поступлении на K-оболочку и s — спин электронной оболочки [5, 6]. Если ядро обладает спином I, то эта формула недействительна.

В работе [8] задача о деполяризации μ-мезона электронной оболочкой решена в частном случае $I=s=\frac{1}{2}$. Ниже она будет рассмотрена в общем случае.

Рассмотрим, как и в работе [8], систему трех первоначально свободных частиц. В момент $t=0$ включается взаимодействие между частицами. Спин-гамильтониан системы запишем в виде

$$\mathbf{H}=A\vec{\mathbf{s}}\vec{\mathbf{I}}+B\vec{\mathbf{s}}\vec{\sigma}+G\vec{\sigma}\vec{\mathbf{I}}, \tag{1}$$

где I, s, σ — спины частиц и A, B, G — соответствующие постоянные сверхтонкого взаимодействия.

Предполагаем, что время существования системы

$$\tau \gg \frac{\hbar}{A+B+G}. \tag{2}$$

Рассматриваемыми частицами могут быть ядро, электронная оболочка с некомпенсированным магнитным моментом и μ-мезон (спин σ), поступающий на K-оболочку с начальной поляризацией P_0. Использование такой терминологии не исключает возможности приложения получаемых формул для описания других подобных систем.

Матрица плотности в момент $t=0$ следующая:

$$\varrho_{kk'} = \frac{1}{2(2I+1)(2s+1)} (1 + P_0 \sigma_z)_{\mu\mu'} \delta_{mm'} \delta_{MM'}. \tag{3}$$

k — трехкомпонентный индекс, состоящий из квантовых чисел спинов мезона, электронной оболочки и ядра μ, m, M. Ось z ориентирована по направлению вектора начальной поляризации $\vec{P}_0$.

Вычисляя по уравнению Шредингера волновые функции чистых состояний, определяем матрицу плотности для $t > 0$:

$$\varrho_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\substack{k k' \\ n n'}} \varrho_{kk'} T_{kn} T_{k'n'} T_{\alpha n} T_{\beta n'} \exp\left[\frac{-i(\varepsilon_n - \varepsilon_{n'})t}{\hbar}\right]. \tag{4}$$

T — матрица преобразования собственных функций спин-оператора в собственные функции оператора Гамильтона; ε_n — собственные значения оператора Гамильтона.

Элементы матрицы T вычисляются по условию ортогональности и по условию диагонализирования:

$$\sum_{\substack{\mu\, m M \\ \mu' m' M'}} T^{-1}_{UVW,\,\mu m M} H_{\mu m M,\,\mu' m' M'} T_{\mu' m' M',\,U'V'W'} = \varepsilon\, \delta_{UU'} \delta_{VV'} \delta_{WW'}. \tag{5}$$

Распределяем вычисления на два этапа, выражая преобразование T в виде произведения

$$T_{\mu m M,\,UVW} = \sum_{W'} D_{WW'} C_{\mu m M,\,UVW'}. \tag{6}$$

Матрица C, диагонализирующая оператор Гамильтона по U и V, может быть представлена в виде суммы произведений коэффициентов Клебша—Гордана

$$C_{\mu m M,\,UVW} = \sum_N \begin{bmatrix} \sigma & I & W \\ \mu & M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & s & U \\ N & m & V \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Используемая символика описана в работе [9].

Представим матричные элементы оператора $\mathbf{H}$ через коэффициенты Клебша—Гордана и запишем преобразование, описываемое матрицей C:

$$K(UWW') = C^{-1}_{UVW,\,\mu m M} H_{\mu m M,\,\mu' m' M'} C_{\mu' m' M',\,U'V'W'} =$$

$$= \sum_{\substack{NN' \mu\mu' \\ mm'MM'q}} (-1)^q \Big\{ A\sqrt{s(s+1)I(I+1)} \begin{bmatrix} \sigma & I & W \\ \mu & M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & s & U \\ N & m & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 & s \\ m & q & m' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 1 & I \\ M & -q & M' \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sigma & I & W' \\ \mu' & M' & N' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W' & s & U' \\ N' & m' & V' \end{bmatrix} \delta_{\mu\mu'} + B\sqrt{s(s+1)\,\sigma(\sigma+1)} \begin{bmatrix} \sigma & I & W \\ \mu & M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & s & U \\ N & m & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 & s \\ m & q & m' \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \sigma \\ \mu & -q & \mu' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & I & W' \\ \mu' & M' & N' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W' & s & U' \\ N' & m' & V' \end{bmatrix} \delta_{MM'} + G\sqrt{I(I+1)\sigma(\sigma+1)} \begin{bmatrix} \sigma & I & W \\ \mu & M & N \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} W & s & U \\ N & m & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 1 & I \\ M & q & M' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \sigma \\ \mu & -q & \mu' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & I & W' \\ \mu' & M' & N' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W' & s & U' \\ N' & m' & V' \end{bmatrix} \delta_{mm'} \Big\}. \tag{8}$$

Графический метод суммирования произведений коэффициентов Клебша—Гордана [9] позволяет привести это выражение к виду

$$K(UWW') = (-1)^{3W+W'-U} F[(2W+1)(2W'+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} I & W & \sigma \\ W' & I & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & W & W' \\ U & s & s \end{Bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2W+2W'-U} L[(2W+1)(2W'+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} \sigma & W & I \\ W' & \sigma & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & W & W' \\ U & s & s \end{Bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{-W} J \begin{Bmatrix} 1 & I & I \\ W & \sigma & \sigma \end{Bmatrix}. \tag{9}$$

где F, L, J — независимые от U, W, W' величины:

$$\left.\begin{aligned} F &= (-1)^{I+3s+\sigma+1} A[s(s+1)(2s+1)I(I+1)(2I+1)]^{1/2}, \\ L &= (-1)^{I+3s+\sigma+1} B[s(s+1)(2s+1)\sigma(\sigma+1)(2\sigma+1)]^{1/2}, \\ J &= (-1)^{3\sigma+3I} G[I(I+1)(2I+1)\sigma(\sigma+1)(2\sigma+1)]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Преобразование D должно диагонализировать выражение [9] по W. Этому требованию удовлетворяет ортогональная матрица

$$D(U) = \begin{Vmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}[1+\gamma\sqrt{K(U)}]} & \sqrt{\frac{1}{2}[1-\gamma\sqrt{K(U)}]} \\ \sqrt{\frac{1}{2}[1-\gamma\sqrt{K(U)}]} & -\sqrt{\frac{1}{2}[1+\gamma\sqrt{K(U)}]} \end{Vmatrix}_{WW'}, \qquad (11)$$

где

$$K(U) = \frac{[K(UW_1W_1) - K(UW_2W_2)]^2}{[K(UW_1W_1) - K(UW_2W_2)]^2 + 4[K(UW_1W_2)]^2}; \qquad (12)$$

$$\gamma = \operatorname{sign}\{[K(UW_1W_1) - K(UW_2W_2)]K(UW_1W_2)\}.$$

Квантовое число W может иметь значения $W_1 = I - 1/2$; $W_2 = I + 1/2$.

Приступаем к вычислению поляризации μ-мезона в конечном состоянии

$$P = \langle\sigma_z\rangle = \operatorname{Sp}[\overline{\varrho(t)}\sigma_z]. \qquad (13)$$

Для этого усредняем матрицу плотности (4) по времени:

$$\overline{\varrho_{\alpha\beta}(t)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \varrho_{\alpha\beta}(t)\,dt = \sum_{kk'n} \varrho_{kk'} T_{kn} T_{k'n} T_{\alpha n} T_{\beta n} +$$

$$+ \sum_{\substack{kk' \\ n\neq n'}} \varrho_{kk'} T_{kn} T_{k'n'} T_{\alpha n} T_{\beta n'} \frac{\hbar}{\tau(\varepsilon_n - \varepsilon_{n'})}\left[\sin\frac{\tau(\varepsilon_n - \varepsilon_{n'})}{\hbar} - i\left(1 - \cos\frac{\tau(\varepsilon_n - \varepsilon_{n'})}{\hbar}\right)\right]. \qquad (14)$$

Основываясь на предположении (2), распределение вероятности распада μ-мезона во времени здесь не учтено.

В мезоатоме $(A+B)/2G$ порядка 10^{-3} и вторая слагаемая формулы (14) пренебрежимо мала. В частном случае $I = s = \frac{1}{2}$ это доказано в работе [8]. Игнорируя нереальные ситуации, принимаем

$$\overline{\varrho_{\alpha\beta}(t)} = \sum_{kk'n} \varrho_{kk'} T_{kn} T_{k'n} T_{\alpha n} T_{\beta n}. \qquad (15)$$

Подставив в формулу (13) выражение (15), (6), (7), (3), выполняем суммирование через всевозможные значения квантовых чисел μ, m, M, V, N. Используя опять графический метод [9], приходим к выражению

$$P = P_0 \frac{(-1)}{(2I+1)(2s+1)} \sum_U (-1)^{2U}(2U+1)^2 \sum_{\substack{W'W'' \\ W^*\overline{W}W}} D_{WW'} D_{WW''} D_{WW^*} D_{W\overline{W}} \times$$

$$\times Z(W^*\overline{W}U)Z(W'W''U), \qquad (16)$$

где

$$Z(x_1x_2x_3) = (-1)^{x_1+x_2}[(2x_1+1)(2x_2+1)]^{1/2}\begin{Bmatrix} \sigma & 1 & \sigma \\ x_1 & I & x_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} x_3 & 1 & x_3 \\ \tau_1 & s & x_2 \end{Bmatrix}. \qquad (17)$$

Теперь учитываем выражение матрицы D (11) и выполняем суммирование по W:

$$P = P_0 \frac{(-1)}{(2I+1)(2s+1)} \sum_U (2U+1)^2 \{[1-K(U)] Z(W_1 W_2 U) Z(W_2 W_2 U) + \\ + 2\gamma \sqrt{K(U)[1-K(U)]} [Z(W_1 W_1 U) Z(W_1 W_2 U) - \\ - Z(W_2 W_2 U) Z(W_1 W_2 U)] + \\ + 2[1-K(U)] Z(W_1 W_2 U) Z(W_1 W_2 U) + \\ + \tfrac{1}{2}[1+K(U)] [(Z(W_1 W_1 U))^2 + (Z(W_2 W_2 U))^2]\}. \tag{18}$$

В полученную формулу вставим конкретные значения функции Z (17), которые вычисляются по известным формулам для 6-j коэффициентов. Это приводит к выражению, которое в общем случае не удается упростить:

$$P = P_0 \frac{(-1)}{6(2I+1)^3(2s+1)} \left\{ \sum_{U=|I-s|+1/2}^{I+s-\frac{1}{2}} \left[\frac{2U+1}{U(U+1)} \Big([1-K(U)] \{ [s(s+1) - \right.\right. \\ - U(U+1) - (I^2 - \tfrac{1}{4})][s(s+1) - U(U+1) - (I+\tfrac{1}{2})(I+\tfrac{3}{2})] - \\ - 2(s+U+I+\tfrac{3}{2})(U+I-s+\tfrac{1}{2})(s+I-U+\tfrac{1}{2})(s+U-I+\tfrac{1}{2})\} + \\ + 4\gamma \sqrt{K(U)[1-K(U)]} [(s+U+I+\tfrac{3}{2})(s+U-I+\tfrac{1}{2})(U+I-s+\tfrac{1}{2}) \times \\ \times (s+I-U+\tfrac{1}{2})]^{1/2} [s(s+1) - U(U+1) - \\ \left. - I^2 - I - \tfrac{1}{4}] \Big) \right] - \tfrac{1}{2} \sum_{U=|I-s-1/2|}^{I+s-\frac{1}{2}} \frac{2U+1}{U(U+1)} [1+K(U)] \times \\ \times [s(s+1) - U(U+1) - (I^2 - \tfrac{1}{4})]^2 - \tfrac{1}{2} \sum_{U=|I-s+1/2|}^{I+s+\frac{1}{2}} \frac{2U+1}{U(U+1)} \times \\ \left. \times [1+K(U)][s(s+1) - U(U+1) - (I+\tfrac{1}{2})(I+\tfrac{3}{2})]^2 \right\}. \tag{19}$$

Применимость полученного результата ограничивается условиями действительности формулы (15), которые более подробно исследованы в работе [8]. Эти условия грубо описываются неравенствами $A \gg \frac{\hbar}{\tau}$ и $B \gg \frac{\hbar}{\tau}$ и эквивалентны требованию $\tau \gg t'$, где $t' \approx \frac{\hbar}{\Delta\varepsilon}$ — время поворота спина [5]. В состоянии 1S $t' \approx 10^{-10}$ *сек* и отмеченное условие выполняется хорошо. На высших уровнях условие $\tau \gg t'$ не выполняется [5]. Исходить из точного выражения (14) практически невозможно ввиду чрезмерной громоздкости выкладок.

В частном случае $s = 0$ полученные результаты совпадают с известными [1, 2].

В частном случае $I = s = \frac{1}{2}$ формулы (12) и (19) упрощаются следующим образом:

$$K = \frac{(2G-A-B)^2}{4(A^2+B^2+G^2-AB-BG-AG)}, \tag{20}$$

$$P = \frac{P_0}{6}\left[3 + \frac{2}{3}K\left(\sqrt{\frac{3(1-K)}{K}} - 1\right)\right]. \tag{21}$$

Совмещая эти выражения, получим в полном согласии с результатами работы [8]:

$$P = P_0\left[\frac{5}{9} - \frac{(G-B)^2}{6(A^2+B^2+G^2-AB-AG-BG)}\right]. \quad (22)$$

При $A, B \ll G$ из второй слагаемой формулы (22) можно получить $^1/_6$. Тогда $P = \frac{7}{18}P_0$, что определяет высоту плато графика $P\left(\frac{A+B}{2G}\right)$, приведенного в работе [8]. В общем случае такому приближению соответствует допущение $K = 1$, позволяющее существенно упростить формулу остаточной поляризации:

$$P = \frac{P_0}{6(2I+1)^3(2s+1)}\left\{\sum_{U=|I-s-\frac{1}{2}|}^{I+s-\frac{1}{2}} \frac{2U+1}{U(U+1)}\times\right.$$

$$\times[s(s+1) - U(U+1) - (I^2 - \tfrac{1}{4})]^2 + \sum_{U=|I-s+\frac{1}{2}|}^{I+s+\frac{1}{2}} \frac{2U+1}{U(U+1)}\times$$

$$\left.\times[s(s+1) - U(U+1) - (I+\tfrac{1}{2})(I+\tfrac{3}{2})]^2\right\}. \quad (23)$$

Равенство $K = 1$ точно, если $A = B$, и допустимо, если $A \neq B$, но $A \ll G$ и $B \ll G$. В мезоатомах A и B имеют порядок $10^{-3}\,G$.

Таблица 1

I \ s	0	1/2	1	3/2	5/2	7/2	9/2
1/2	0,50	0,39	0,25	0,21	0,19	0,18	0,17
1	0,41	0,34	0,27	0,20	0,16	0,15	0,14
3/2	0,38	0,34	0,28	0,23	0,16	0,14	0,14
5/2	0,35	0,33	0,31	0,27	0,20	0,15	0,14
7/2	0,34	0,33	0,32	0,29	0,24	0,18	0,15
9/2	0,34	0,33	0,32	0,31	0,27	0,22	0,18

В табл. 1 приведены некоторые значения отношения P/P_0, вычисленные по приближенной формуле (23).

Для предварительной оценки зависимости P/P_0 от значений параметров A и B произведены вычисления по формуле (19). Результаты вычислений при $I = \frac{7}{2}$, $s = \frac{1}{2}$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

$\frac{A}{G}$	≈ 0	0,00133	0,00666	0,0265	0,265	0,420	0,840
$\frac{B}{G}$	≈ 0	0,000666	0,0133	0,0530	0,530	0,840	0,420
$\frac{P}{P_0}$	0,333	0,333	0,334	0,334	0,338	0,340	0,324

Эти результаты, а также описание функции $P(A, B)$ при $I = s = \frac{1}{2}$ [8] дают некоторую предварительную количественную характеристику области применимости формулы (23).

При конечной величине s, когда $I \to \infty$, $\frac{P}{P_0}$ приближается к пределу $\frac{1}{3}$. Из табл. 1 видно, что если $s=0$, то поляризация при одном и том же I всегда больше, чем в случае $s \neq 0$. Влияние спина s на поляризацию μ-мезона больше при больших значениях s, но и при малых s ($s=\frac{1}{2}$; $s=1$; $s=\frac{3}{2}$), когда $I=\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$, получается заметный эффект.

Из проведенной работы следует, что остаточная поляризация μ-мезона в мезоатоме зависит, кроме спина ядра, и от некомпенсированного спина электронной оболочки. Значения остаточной поляризации могут быть существенно меньше, чем в ранее исследованных случаях $s=0$ [1,2] и $I=s=\frac{1}{2}$ [8]. Для решения конкретных задач надо определить спин электронной оболочки рассматриваемого мезоатома. Это, однако, сложно, так как процессы при каскаде переходов μ-мезона в атоме изменяют структуру первоначальной электронной оболочки.

Так как остаточная поляризация обычно слабо зависит от значений постоянных сверхтонкого взаимодействия, то для их определения достаточна точность приближенных методов теории парамагнетиков.

Автор благодарит М. Кыйва за полезные советы и обсуждение работы и В. Салум за составление программы вычислений по формуле (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Überall H., Phys. Rev., **114**, No. 6, 1640 (1959).
2. Lubkin E., Phys. Rev., **119**, No. 2, 815 (1960).
3. Бухвостов А. П., Шмушкевич И. М., ЖЭТФ, **41**, вып. 6 (12), 1895 (1961).
4. Бухвостов А. П., Попов Н. П., ЖЭТФ, **46**, вып. 5, 1842 (1964).
5. Egorov L. B., Zhuravlev G. V., Ignatenko A. E., Li Syuang-Ming, Petrashku M. G., Chultem D., Nucl. Phys., **23**, No. 1, 62 (1961).
6. Ignatenko A. E., Nucl. Phys., **23**, No. 1, 75 (1961).
7. Buckle D. C., Kane J. R., Siegel R. T., Wetmore R. J., Phys. Rev. Lett., **20**, No. 14, 705 (1968).
8. Таммет Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, № 1, 120 (1969).
9. Юцис А. П., Бандзайтис А. А., Теория момента количества движения в квантовой механике, Вильнюс, 1965.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
30/XII 1968

EVE TAMMET

KOMPENSEERIMATA ELEKTRONKIHI MÕJUST μ-MESONI POLARISATSIOONILE MESOAATOMIS

Vaadeldakse kolme osakese süsteemi, mida kirjeldab spin-hamiltoniaan $\mathbf{H} = A\,\vec{s}\,\vec{\mathbf{I}} + B\,\vec{s}\,\vec{\sigma} + G\,\vec{\sigma}\,\vec{\mathbf{I}}$, kus I, σ, s on vastavalt tuuma, μ-mesoni ja elektronkihi spin ja A, B, G — ülipeene interaktsiooni konstandid. μ-mesoni polarisatsiooni arvutamiseks on tuletatud üldine valem (19). Konstantide reaalsete väärtuste korral on hea täpsusega rakendatav ka lihtsustatud valem (23). Arvutustulemused on esitatud tabelis. Tööst järeldub, et μ-mesoni polarisatsioon sõltub oluliselt nii tuuma spinist I kui ka elektronkihi spinist s.

EVE TAMMET

THE EFFECT OF NONCOMPENSATED ELECTRON SHELL UPON MUON POLARIZATION IN MESIC ATOM

A three-particle system described by the spin Hamiltonian $\mathbf{H} = A\vec{s}\vec{\mathbf{I}} + B\vec{s}\vec{\sigma} + G\vec{\sigma}\vec{\mathbf{I}}$ is dealt with. *I*, σ, *s* are spins of nucleus, muon and of the noncompensated electron shell respectively and *A*, *B*, *G* are hyperfine interaction constants. A general formula (19) for the muon polarization has been derived. The formula (23) is a good approximation for the actual values of constants. The results of numerical calculation have been presented in the table. The muon polarization is shown to depend essentially on the spins of the nucleus and of the electron shell.