

П. КАРД, Е. НЕСМЕЛОВ, Г. ҚОНЮХОВ, В. ИВАНОВ

## ПРОСВЕТЛЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫМ СИММЕТРИЧНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Показана возможность изготовления трехслойной симметричной просветляющей системы слоев с общей оптической толщиной, меньшей четверти той длины волны, при которой пропускание максимально.

### Введение

В настоящее время теория просветления оптических покрытий разработана уже довольно основательно [1-8]. Ее дальнейшее развитие идет в основном по пути создания ахроматических просветляющих покрытий. Так как число различных пленкообразующих веществ, прозрачных в той или другой спектральной области, не очень велико, то возможности выбора показателей преломления слоев в просветляющем покрытии довольно жестко ограничены. В связи с этим важное значение получает варьирование толщин слоев просветляющего покрытия. Необходимость этого диктуется и практической невозможностью применения относительно толстых слоев в некоторых случаях (например, при просветлении германия, кремния или материалов группы  $A^{III}B^V$ ), т. е. неприменимость в этих случаях обычного просветления слоями с толщиной, кратной четверти длины волны. Поэтому возникает вопрос о просветлении с помощью возможно более тонких пленок, например обладающих суммарной толщиной меньше четверти длины волны в точке максимального пропускания. Некоторые результаты по такому просветлению изложены в [4]. В нижеследующем дадим еще одно эффективное решение этой задачи.

### Основные соотношения

Коэффициент пропускания системы  $N$  непоглощающих слоев выражается формулой [9-10]:

$$T(\varphi) = 4nn_0[(n_0 a_{11} + na_{22})^2 + (nn_0 a_{12} - a_{21})^2]^{-1}, \quad (1)$$

где  $n_0$  — показатель преломления исходной среды,  $n$  — показатель преломления подложки, а величины  $a_{ij}$  суть элементы матрицы  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^N \begin{pmatrix} \cos g_j \varphi & n_j^{-1} \sin g_j \varphi \\ -n_j \sin g_j \varphi & \cos g_j \varphi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

причем

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1. \quad (3)$$

В формуле (2)  $n_j$  есть показатель преломления  $j$ -го слоя (нумерация идет в направлении от исходной среды к подложке);  $\varphi$  — спектральная переменная, равная  $(\pi/2)(\lambda_0/\lambda)$ ;  $\lambda_0$  — длина волны, при которой просветление максимально, и  $g_j$  — оптическая толщина  $j$ -го слоя в единицах  $\lambda_0/4$ .

Максимальное просветление означает, что  $T = 1$ . Найдем необходимые для этого условия. Из (1), с учетом (3), получаем

$$(n_0 a_{11} - n a_{22})^2 + (a_{21} + n n_0 a_{12})^2 = 0, \quad (4)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} n_0 a_{11} &= n a_{22}, \\ a_{21} &= -n n_0 a_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Эти условия, необходимые для максимального просветления, являются, очевидно, и достаточными для этого. Значения  $a_{ij}$  в них следует брать при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , хотя они могут выполняться, в зависимости от состава покрытия, и в других точках спектра. Вообще же говоря, при  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$  просветление неадекватно или его нет вовсе. Общим условием (неадекватного) просветления является неравенство

$$T(\varphi) > 4nn_0(n + n_0)^{-2}, \quad (6)$$

которое, согласно (1) и (3), можно записать как

$$(a_{11} - a_{22})(n_0^2 a_{11} - n^2 a_{22}) + (a_{21} + n_0^2 a_{12})(a_{21} + n^2 a_{12}) < 0. \quad (7)$$

Проблема ахроматического просветления состоит в таком подборе толщин и показателей преломления слоев, чтобы это неравенство удовлетворялось в возможно более широком спектральном интервале. В настоящей статье главное внимание мы обратим на условие, чтобы слои были возможно тоньше.

Перейдем к более конкретной формулировке задачи. Фиксируем прежде всего число слоев  $N$ . Для одно- и двухслойных покрытий исчерпывающие решения уже известны (см. обзор [4]). При  $N > 2$  все известные до сих пор решения предполагают кратность толщин слоев  $\lambda_0/4$ , что для нас интереса не представляет. Наоборот, аналогично анализу двухслойных покрытий в [4], мы будем искать и для трехслойного покрытия такое решение, в котором суммарная толщина слоев меньше  $\lambda_0/4$ . Как дополнительное упрощающее требование мы поставим только условие симметричности покрытия. Анализ несимметричного покрытия значительно сложнее и будет выполнен в дальнейшем особо.

Как известно (см., например, [1]), у симметричной пленки  $a_{11} = a_{22}$ . В таком случае, полагая  $n \neq n_0$  (иначе проблема просветления и не возникает), из формул (3) и (5) находим:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = 0, \\ a_{12} &= \pm (nn_0)^{-\frac{1}{2}}, \\ a_{21} &= \mp (nn_0)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

тогда как неравенство (7), определяющее интервал просветления, принимает вид

$$(a_{21} + n_0^2 a_{12})(a_{21} + n^2 a_{12}) < 0. \quad (9)$$

Согласно формуле (2), где следует положить  $N = 3$ ,  $n_1 = n_3$  и  $g_1 = g_3$ , величины  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  и  $a_{21}$  выражаются следующим образом:

$$a_{11} = \cos 2g_1 \varphi \cos g_2 \varphi - (2n_1 n_2)^{-1} (n_1^2 + n_2^2) \sin 2g_1 \varphi \sin g_2 \varphi, \quad (10)$$

$$a_{12} = n_1^{-1} \sin 2g_1 \varphi \cos g_2 \varphi + (2n_1^2 n_2)^{-1} [(n_1^2 + n_2^2) \cos 2g_1 \varphi + (n_1^2 - n_2^2)] \sin g_2 \varphi, \quad (11)$$

$$a_{21} = -n_1 \sin 2g_1 \varphi \cos g_2 \varphi - (2n_2)^{-1} [(n_1^2 + n_2^2) \cos 2g_1 \varphi - (n_1^2 - n_2^2)] \sin g_2 \varphi. \quad (12)$$

### Решение задачи

Подставляя в формулы (8) вместо  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  выражения из формул (10)–(12) с  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , находим следующие уравнения:

$$\cos \pi g_1 \cos(\pi g_2/2) - (2n_1 n_2)^{-1} (n_1^2 + n_2^2) \sin \pi g_1 \sin(\pi g_2/2) = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sin \pi g_1 \cos(\pi g_2/2) + (2n_1 n_2)^{-1} [(n_1^2 + n_2^2) \cos \pi g_1 + (n_1^2 - n_2^2)] \sin(\pi g_2/2) = \\ = \pm n_1 (n n_0)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} -\sin \pi g_1 \cos(\pi g_2/2) - \\ - (2n_1 n_2)^{-1} [(n_1^2 + n_2^2) \cos \pi g_1 - (n_1^2 - n_2^2)] \sin(\pi g_2/2) = \\ = \mp n_1^{-1} (n n_0)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти уравнения, в силу (3) не независимые, определяют при заданных показателях преломления  $n_1$  и  $n_2$  слоев их толщины  $g_1$  и  $g_2$ . Складывая уравнения (14) и (15), находим:

$$\sin(\pi g_2/2) = \pm n_2 (n_1^2 - n n_0) (n_1^2 - n_2^2)^{-1} (n n_0)^{-\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Подставляя эту формулу опять в одно из этих уравнений, находим для  $\cos \pi g_1$  квадратное уравнение, имеющее только одно (двойное) решение:

$$\cos \pi g_1 = (n_1^2 - n n_0) (n_1^2 + n_2^2) (n_1^2 + n n_0)^{-1} (n_1^2 - n_2^2)^{-1}. \quad (17)$$

Уточним полученные результаты. Так как мы хотим иметь возможно тонкую пленку, потребуем, чтобы

$$\left. \begin{aligned} g_1 < 0,5, \\ g_2 < 1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Тогда  $\pi g_1$  и  $\pi g_2/2$  лежат в первой четверти и из формулы (17) вытекает:

$$(n_1^2 - n n_0) (n_1^2 - n_2^2) > 0, \quad (19)$$

а отсюда заключаем, что в формуле (16) надо взять плюс:

$$\sin(\pi g_2/2) = n_2 (n_1^2 - n n_0) (n_1^2 - n_2^2)^{-1} (n n_0)^{-\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Это значит, что и в формулах (8) следует взять верхний знак:

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= (nn_0)^{-\frac{1}{2}} > 0, \\ a_{21} &= -(nn_0)^{\frac{1}{2}} < 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Убедимся далее в том, что неравенства (18) влекут за собой и более сильное неравенство:

$$2g_1 + g_2 < 1. \quad (22)$$

В самом деле, из уравнения (13) следует:

$$1 - \operatorname{tg}(\pi g_1) \operatorname{tg}(\pi g_2/2) = (n_1 - n_2)^2 (n_1^2 + n_2^2)^{-1} > 0;$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}[(\pi/2)(2g_1 + g_2)] > 0,$$

откуда и вытекает неравенство (22). Итак, суммарная толщина нашей пленки меньше  $\lambda_0/4$ .

Кроме условия (19), на показатели преломления налагается еще другое условие, без которого система уравнений (13) — (15) не имела бы вообще решения. Из формул (17) и (20), в силу  $\cos \pi g_1 < 1$  и  $\sin(\pi g_2/2) < 1$ , следует:

$$(n_1^2 - n_2^2)(n_2^2 - nn_0) < 0. \quad (23)$$

Сопоставляя условия (19) и (23), видим, что они удовлетворяются в двух случаях:

$$n_1^2 > nn_0 > n_2^2 \quad (24)$$

или

$$n_1^2 < nn_0 < n_2^2. \quad (25)$$

Нам остается еще найти интервал просветления, т. е. тот интервал значений  $\varphi$  (включающий  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ), в котором выполняется неравенство (9). Для этого прежде всего отметим, что точки  $\varphi = \pi/2g_1$  и  $\varphi = \frac{\pi}{g_2}$  лежат вне интервала просветления. В самом деле, как вытекает из формулы (11), при  $\varphi = \pi/2g_1$   $a_{12} = -(n_2/n_1^2) \sin(\pi g_2/2g_1)$ , а при  $\varphi = \pi/g_2$   $a_{12} = -n_1^{-1} \sin(2\pi g_1/g_2)$ . Отсюда следует, что если  $g_2 < 2g_1$ , то в точке  $\varphi = \pi/2g_1$   $a_{12} < 0$ , а если  $g_2 > 2g_1$ , то в точке  $\varphi = \pi/g_2$   $a_{12} < 0$ . Но так как в точке  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , согласно формуле (21),  $a_{12}$  положительно и, согласно формуле (11),  $a_{12}$  есть непрерывная функция  $\varphi$ , то в интервале  $\pi/2 < \varphi < \pi/2g_1 < \pi/g_2$  (если  $g_2 < 2g_1$ ) или в интервале  $\pi/2 < \varphi < \pi/g_2 < \pi/2g_1$  (если  $g_2 > 2g_1$ ) должна находиться точка, в которой  $a_{12} = 0$ . Но эта точка лежит заведомо вне интервала просветления, поскольку неравенство (9) при  $a_{12} = 0$  не выполняется. Следовательно, точки  $\varphi = \pi/2g_1$  и  $\varphi = \pi/g_2$  тоже лежат вне интервала просветления. Из доказанного следует, что во всем интервале просветления выполняются неравенства

$$\left. \begin{aligned} \sin 2g_1 \varphi &> 0, \\ \sin g_2 \varphi &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Ясно также, что неравенства (21) сохраняют свою силу везде в интервале просветления.

Без ограничения общности, в силу симметричности покрытия, и так как  $T$  не зависит от направления падения света, можно считать, что  $n > n_0$ . Тогда неравенство (9) равносильно следующим двум:

$$\left. \begin{aligned} a_{21} + n_0^2 a_{12} < 0, \\ a_{21} + n^2 a_{12} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Подставляя сюда вместо  $a_{12}$  и  $a_{21}$  выражения из формул (11) и (12), находим:

$$\left. \begin{aligned} & (n_1^2 - n_0^2) \sin 2g_1 \varphi \cos g_2 \varphi + \\ & + (2n_1 n_2)^{-1} (n_1^2 - n_0^2) (n_1^2 + n_2^2) \cos 2g_1 \varphi \sin g_2 \varphi - \\ & - (2n_1 n_2)^{-1} (n_1^2 + n_0^2) (n_1^2 - n_2^2) \sin g_2 \varphi > 0, \\ & (n_1^2 - n^2) \sin 2g_1 \varphi \cos g_2 \varphi + \\ & + (2n_1 n_2)^{-1} (n_1^2 - n^2) (n_1^2 + n_2^2) \cos 2g_1 \varphi \sin g_2 \varphi - \\ & - (2n_1 n_2)^{-1} (n_1^2 + n^2) (n_1^2 - n_2^2) \sin g_2 \varphi < 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Далее следует различать четыре случая. Прежде всего для сокращения записи введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A_0 & \equiv \frac{(n_1^4 - n_0^2 n_2^2) \operatorname{tg} g_1 \varphi + n_1^2 (n_0^2 - n_2^2) \operatorname{ctg} g_1 \varphi}{2n_1 n_2 (n_1^2 - n_0^2)}, \\ A & \equiv \frac{(n_1^4 - n^2 n_2^2) \operatorname{tg} g_1 \varphi + n_1^2 (n^2 - n_2^2) \operatorname{ctg} g_1 \varphi}{2n_1 n_2 (n_1^2 - n^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Неравенства (28) можно тогда привести к следующей записи:

1. Если  $n_1^2 > nn_0 > n_2^2$ ,  $n_1 > n > n_0$ , то

$$A_0 < \operatorname{ctg} g_2 \varphi < A. \quad (30)$$

2. Если  $n_1^2 < nn_0 < n_2^2$ ,  $n_1 < n_0 < n$ , то

$$A < \operatorname{ctg} g_2 \varphi < A_0. \quad (31)$$

В остальных двух случаях получается более простой результат.

3. Если  $n_1^2 > nn_0 > n_2^2$ ,  $n > n_1 > n_0$ , то неравенства (28) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \sin 2g_1 \varphi \cos g_2 \varphi + \\ & + \frac{(n_1^2 - n_0^2) (n_1^2 + n_2^2) \cos 2g_1 \varphi \sin g_2 \varphi - (n_1^2 + n_0^2) (n_1^2 - n_2^2) \sin g_2 \varphi}{2n_1 n_2 (n_1^2 - n_0^2)} > 0, \\ & \sin 2g_1 \varphi \cos g_2 \varphi + \\ & + \frac{(n^2 - n_1^2) (n_1^2 + n_2^2) \cos 2g_1 \varphi \sin g_2 \varphi + (n^2 + n_1^2) (n_1^2 - n_2^2) \sin g_2 \varphi}{2n_1 n_2 (n^2 - n_1^2)} > 0. \end{aligned}$$

Так как здесь первые два члена в обоих неравенствах одинаковы, третий же в первом неравенстве отрицателен, а во втором положителен, то второе неравенство удовлетворяется, как только удовлетворяется пер-

вое. Поэтому второе можно отбросить, тогда как первое преобразуется к виду

$$\operatorname{ctg} g_2 \varphi > A_0. \quad (32)$$

4. Пусть, наконец,  $n_1^2 < nn_0 < n_2^2$ ,  $n > n_1 > n_0$ . Тогда аналогично предыдущему случаю находим:

$$\operatorname{ctg} g_2 \varphi > A. \quad (33)$$

Формулы (29)—(33) определяют, после того как  $g_1$  и  $g_2$ , согласно формулам (17) и (20), уже известны, интервал просветления. Ближайший анализ этих формул в сочетании с формулами (17) и (20) позволил бы, вероятно, выбирать в части показателей преломления наиболее выгодный вариант. Не останавливаясь на этом вопросе, заслуживающем отдельного рассмотрения, перейдем к примеру и соответствующим экспериментальным результатам.

### Пример

Возьмем для примера  $n_0 = 1$ ,  $n = 4$  (германий),  $n_1 = 2,2$  (ZnS) и  $n_2 = 1,4$  (MgF<sub>2</sub>). Из формул (17) и (20) находим:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= 0,428, \\ g_2 &= 0,131. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Затем из формулы (32) находим интервал просветления:

$$0 < \varphi < 2,883 \text{ (радиан)}. \quad (35)$$

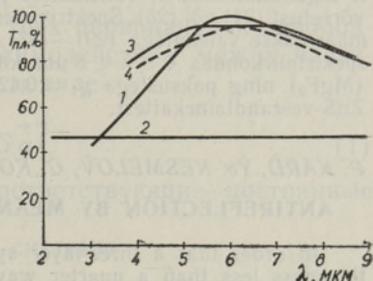
В эксперименте (см. ниже) такое покрытие было применено для двустороннего просветления пластинки германия при  $\lambda_0 = 6$  мкм. Коэффициент пропускания  $T_{\text{пл}}$  пластинки выражается через коэффициент пропускания  $T$  одной ее поверхности по известной формуле:

$$T_{\text{пл}} = T(2 - T)^{-1}. \quad (36)$$

Подставляя сюда вместо  $T$  выражение из формулы (1) и учитывая формулу (3) и равенство  $a_{11} = a_{22}$ , имеем:

$$T_{\text{пл}} = 2nn_0 [n^2 + n_0^2 + (a_{21} + n_0^2 a_{12})(a_{21} + n^2 a_{12})]^{-1}. \quad (37)$$

На рисунке показана кривая  $T_{\text{пл}}$ , вычисленная по этой формуле для нашего примера (кривая 1). Необходимо отметить, что эта теоретическая кривая почти совпадает с теоретической кривой пропускания в случае однослойного просветления германиевой пластинки слоем ZnS. Отсюда может показаться, что трехслойное просветление не имеет никаких преимуществ по сравнению с однослойным. Однако это не так. Данный пример не исчерпывает всех возможностей теории. Нет сомнения, что выведенные нами общие формулы трехслойного просветления предоставляют более широкие, чем в случае однослойного просветления, возможности выбора как показателей преломления слоев, так и, в связи с этим, их толщины; следовательно, трехслойное просветление лучше, по-видимому, чем однослойное, способно учитывать те реальные особенности оптического (и механического) поведения применяемых веществ, которые в общей теоретически-расчетной схеме обычно игнорируются (дисперсия, поглощение и др.). В частности, приведенные ниже экспериментальные данные к нашему примеру обнаруживают, вопреки теоретическому расчету, более высокую эффективность трехслойной системы.



## Эксперимент

На рисунке приведены, кроме теоретической кривой 1, экспериментальные графики коэффициента пропускания  $T_{\text{пл}}$  непросветленной германиевой пластинки (кривая 2), просветленной трехслойным покрытием (0,428 ZnS | 0,131 MgF<sub>2</sub> | 0,428 ZnS) (кривая 3) и просветленной однослойным покрытием ZnS (кривая 4). Довольно значительное расхождение между теоретической и экспериментальной кривыми 1 и 3 обусловлено, по-видимому, неполным совпадением принятых в теоретическом расчете значений показателей преломления и толщин слоев с осуществленными в эксперименте. Наряду с этим существенно, очевидно, и пренебрежение в теории реальными особенностями слоев, о чем было сказано выше. В связи с этим следует подчеркнуть, что в нашем эксперименте трехслойная пленка несколько неожиданным образом оказывается заметно более эффективной, чем однослойная (кривые 3 и 4).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. Г. и др., Просветление оптики, М., Гостехиздат, 1946.
2. Розенберг Г. В., Оптика тонкослойных покрытий, М., Физматгиз, 1958.
3. Vašiček A., Optika tenkých vrstev, Praha, 1956.
4. Физика тонких пленок, II (под ред. Г. Хасса и Р. Э. Туна), М., «Мир», 1967.
5. Кард П. Г., Опт. и спектр., 2, 245 (1957).
6. Kard P., Loodus ja matemaatika, I, 1959, lk. 67.
7. Кард П. Г., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, вып. 74, 56 (1959).
8. Крылова Т. Н., Соколова Р. С., Опт. и спектр., 2, 254 (1957).
9. Несмелов Е. А., Конюхов Г. П., ОМП, № 10, 10 (1961).
10. Ребане К. К., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, вып. 62, 180 (1958).
11. Кард П. Г., Опт. и спектр., 9, 95 (1960).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию  
7/X 1968

P. KARD, J. NESMELOV, G. KONJUNHOV, V. IVANOV

## SELGENDAMINE KOLMEKIHILISE SÛMMEETRIILISE KATTE ABIL

Et kolmekihilise sümmeetrilise selgendava katte summaarne optiline paksus oleks väiksem kui  $\lambda_0/4$  ning läbilaskvuse koefitsient selle lainepikkuse juures oleks  $T(\lambda_0) = 1$ , tuleb katte väliskihtide optiline paksus  $g_1 \lambda_0/4$  valida valemi (17) kohaselt ja sisekihi optiline paksus  $g_2 \lambda_0/4$  valemi (20) kohaselt. Neis valemis tähendab  $n_0$  lähtekeskkonna,  $n_1$  tagakeskkonna,  $n_2$  väliskihtide ja  $n_2$  sisekihi murdumisnäitajad, mis peavad rahuldama võrratust (24) või (25). Spektrivahemik, milles kate on selgendav, s. o.  $T > 4nn_0(n + n_0)^{-2}$ , määratakse valemitega (29)–(33). Katselisel teel leiti, et niisugune kate  $\text{Ge}(n = 4)$  jaoks spektripiirkonnas  $4 < \lambda < 8 \mu\text{m}$  kihtide murdumisnäitajatega  $n_1 = 2,2$  (ZnS) ja  $n_2 = 1,4$  ( $\text{MgF}_2$ ) ning paksustega  $g_1 = 0,428$  ja  $g_2 = 0,131$  on mõnevõrra efektiivsem ühekihilisest ZnS-veerandlainekattest.

P. KARD, Ye. NESMELOV, G. KONYUKHOV, V. IVANOV

## ANTIREFLECTION BY MEANS OF A THREE-LAYER SYMMETRIC COATING

In order that a three-layer symmetric antireflecting coating may have total optical thickness less than a quarter wave  $\lambda_0/4$ , the transmittance  $T(\lambda_0)$  being equal to unity, the optical thicknesses,  $g_1 \lambda_0/4$  of the outer layers, and  $g_2 \lambda_0/4$  of the inner layer must satisfy equations (17) and (20), where  $n_0$ ,  $n$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  denote the refractive indices of the incidence medium, the backing medium, and of the outer and inner layers, respectively. The indices must satisfy inequality (24) or (25). The spectral interval, where the coating is antireflecting, i. e.  $T > 4nn_0(n + n_0)^{-2}$ , is determined by the formulae (29)–(33). Experimentally it is shown that such a coating in the spectral interval  $4 < \lambda < 8 \mu\text{m}$  for  $\text{Ge}(n = 4)$  consisting of two ZnS-layers ( $n_1 = 2,2$ ,  $g_1 = 0,428$ ) with a  $\text{MgF}_2$ -layer ( $n_2 = 1,4$ ,  $g_2 = 0,131$ ) between them has somewhat better performance than a single quarter-wave ZnS-layer.