EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.2.04

И. КЕЙС

К ОПТИМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ГИРОСТАТА

Сообщение третье

В данной работе, являющейся продолжением исследования [1-9], проблема стабилизации некоторого частного вращения гиростата рассматривается в двух различных постановках. Для первой предполагается наличие норм-ограниченного [1] регулятора, соответствующего моментам от газовых рулей и маховиков, с критерием — быстродействие или с его обобщением специального вида. Изучается задача глобальной оптимальной стабилизации, которая сводится к проблеме существования одной функции, решающей нелинейное уравнение в частных производных и удовлетворяющей некоторому неравенству. Для второй постановки определяются условия локальной стабилизации частного движения гиростата при отсутствии ограничений на управляющие моменты, которые развиваются только маховиками, причем целью исследования является установление возможностей, при которых число маховиков может быть сведено к одному или к двум. Эта вторая задача может быть отнесена к числу оптимальных в том отношении, что указывается линейное управление, а последнее может быть избрано таким, чтобы сообщить переходному процессу желаемую степень затухания, попутно минимизируя соответствующий квадратичный функционал-критерий оптимизации.

В первой части статьи используются обозначения, принятые в предшествующих сообщениях, во второй они оговариваются особо.

1. Обратимся к уравнениям движения гиростата вокруг центра масс (1.0), (1.1), (1.2), (1.3) статьи [9], когда последний движется по круговой орбите. Целью глобальной стабилизации решения — относительного равновесия

$$\omega_1^* = \omega_2^* - \omega = \omega_3^* = 0,\ k_1^* = k_2^* - k = k_3^* = 0,$$
$$\beta_1^* = \beta_2^* - 1 = \beta_3^* = \sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_3^* - 1 = 0 \tag{1.0}$$

являются критерии

$$\int_0^t A_0(x)\,dt, \tag{1.1}$$

$$\Gamma_{(i)} \int_0^T A_{(i)} \|w\|^{(i)} dt,\quad \int_0^T A(x)\,[F_1(\|w\|) + F_2(\|x\|)]\,dt, \qquad (1.2),\ (1.3)$$

в которых A положительны и исчезают лишь при $x = 0$, а F_i — достаточно гладкие вогнутые функции отмеченных аргументов ($i=\overline{1,2}$). Квадрат нормы $\|w\|$ есть некоторая положительно определенная однородная квадратичная форма от управления $\{u^*, v^*\}$, соответствующая моментам от газовых рулей $\{u^*, 0\}$ и маховиков $\{0, v^*\}$. Предположим, что имеет место норм-ограниченный регулятор

$$\|w\| < W_0(x), \ W_0(x) > 0. \tag{1.4}$$

Для всех или для части переменных (1.0) поставим задачу об оптимальной глобальной относительно функционалов (1.1)—(1.3) стабилизации при действии норм-ограниченного регулятора (1.4).

Система уравнений (1.0)—(1.3) [9] в отклонениях переменных из строки (1.0) обладает интегралами двух типов: «абсолютными» $\Psi(x)$, справедливыми для любых $\{u^*, v^*\}$ и «относительными» $\psi(x)$, существующими лишь при $u^* = v^* = 0$, именно:

$$\Psi_1 = 2\sigma_3 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 0, \tag{1.5}$$

$$\Psi_2 = \sigma_2 + \beta_3 + \sigma_1\beta_1 + \sigma_2\beta_2 + \sigma_3\beta_3 = 0, \tag{1.6}$$

$$\Psi_3 = 2\beta_2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 0, \tag{1.7}$$

$$\psi_0 = a_i K_i^2 + b_j k_j^2 + d_k \sigma_k^2 + \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 = c_0^2, \tag{1.8}$$

$$\psi_j = \varepsilon_{(j)} K_{(j)} + (1 - \varepsilon_{(j)})\, k_{(j)} = c_j. \tag{1.9}$$

Здесь приняты обозначения:

$$a_i = (G_i^{-1} - \omega\delta_0^{-2})\,\omega^{-1}, \ b_i = (g_i^{-1} - G_i^{-1})\,\omega^{-1}, \ d_k = 3\omega(G_k - G_3), \tag{1.10}$$

$$\xi_i = \delta_0\beta_i - \delta_0^{-1} K_i, \ \delta_0^2 = G_2\omega + k, \ K_i = G_{(i)}\omega_{(i)} + k_i \ \ (i, j = \overline{1,3}; \ k = \overline{1,2})$$

и предположения о положительности параметров a, d_k, ω, ограничивающие геометрию и кинематику движений гиростата. Круглая скобка при одинаковых индексах означает отсутствие суммирования.

Заметим попутно, что интеграл (1.8) — типа Якоби и существует, в частности, в силу структуры уравнения (1.1) из [9].

Совершим теперь преобразование переменных, равное произведению «сжатия» на «вращение», по формулам перехода к новым фазовым координатам:

$$\begin{aligned} K_i &= a_i'' x_i + c_i'' x_{6+i}, \\ k_i &= b_i'' x_{3+i}, \\ \beta_i &= c_i' x_{6+i}, \\ \sigma_k &= d_k' x_{9+k}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

в которых постоянные имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} a_i'' &= [a_{(i)}(1 + \beta_{(i)}^{0\,2})]^{-1/2}, \ \beta_{(i)}^0 = (\delta_0 a_{(i)}^{1/2})^{-1}, \ c_i' = (\delta_0 r_{(0i)})^{-2} c_{(i)}'', \\ c_i'' &= \beta_{(i)}^0 a_{(i)}'', \ b_i'' = b_i^{-1/2}, \ r_{0i} = \beta_{(i)}^0 (1 + \beta_{(i)}^{0\,2})^{-1/2}, \ d_k' = d_k^{-1/2}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

а параметры a, b, d, δ_0 определяются равенствами (1.10). В переменных $x_\nu\ (\nu=\overline{1,11})$ интеграл ψ_0 есть квадрат нормы $\{x_\nu\}$.

Выражения для интегралов ψ_i с точностью до множителя пропорциональности могут быть записаны согласно (1.9) и (1.11) в виде равенств

$$\xi_{(i)} x_{(i)} + \eta_{(3+i)} x_{(3+i)} + \zeta_{(6+i)} x_{(6+i)} = c_i, \tag{1.13}$$

параметры ξ, η, ζ которых равны

$$\xi_{(i)} = \varepsilon_{(i)} a''_{(i)} \nu^{-1}_{(i)},\ \eta_{(3+i)} = (1-\varepsilon_{(i)}) b^{-1/2}_{(i)} \nu^{-1}_{(i)},\ \zeta_{(6+i)} = \varepsilon_{(i)} \beta^0_{(i)} a''_i \nu^{-1}_i,$$
$$\nu^2_{(i)} = g_{(i)}\, \omega [1 + g_{(i)}\, \omega (\delta_0^2 - G_{(i)}\, \omega)^{-1}]. \tag{1.14}$$

Совершим в пространстве x такой поворот, чтобы в новых осях y при отсутствии управления существовали три постоянные проекции $y_{(3i-1)}$ вектора $\{x\}$, выраженные соответственно интегралам (1.13) и формулам перехода координат равенствами

$$\begin{aligned} y_{1+3\sigma} &= \nu^{-1}_{\sigma+1,0} (\xi_{\sigma+1} x_{\sigma+4} - \eta_{\sigma+1} x_{\sigma+1}), \\ y_{2+3\sigma} &= \xi_{\sigma+1} x_{\sigma+1} + \eta_{\sigma+1} x_{\sigma+4} + \zeta_{\sigma+1} x_{\sigma+7}, \\ y_{3(1+\sigma)} &= \nu^{-1}_{\sigma+1,0} [\nu^2_{\sigma+1,0} x_{\sigma+7} - (\xi_{\sigma+1} x_{\sigma+1} + \eta_{\sigma+1} x_{\sigma+4}) \zeta_{\sigma+1}], \end{aligned} \tag{1.15}$$

в которых употребляются обозначения

$$\nu^2_{\sigma+1,0} = \xi^2_{\sigma+1} + \eta^2_{\sigma+1},\ \sigma = \overline{0,2}.$$

Используя преобразования (1.11) и (1.15) нетрудно заметить, что в новых переменных существуют «абсолютные» интегралы

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\equiv \widetilde{\Psi}_1 (y_{9+k}, \sigma_3) = 0, \\ \Psi_2 &\equiv \widetilde{\Psi}_2 (y_{9+k}, \sigma_3, y_{2+3\sigma}, y_{3(1+\sigma)}) = 0, \\ \Psi_3 &= \widetilde{\Psi}_3 (y_{2+3\sigma}, y_{3(1+\sigma)}) = 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

и относительный интеграл

$$\Phi\Big[\sum_{\sigma=0}^{2} (y^2_{1+3\sigma} + y^2_{3(1+\sigma)}) + \sum_{k=1}^{2} y^2_{9+k},\ y_{2+3\sigma}\Big],$$

который рассмотрим в аддитивной форме:

$$\sum_{\sigma=0}^{2} (y^2_{1+3\sigma} + y^2_{3(1+\sigma)}) + \sum_{k=1}^{2} y^2_{9+k} + \Phi_0(y_{2+3\sigma}); \tag{1.17}$$

$\Phi, \Phi_0 > 0$ — произвольные гладкие функции указанных аргументов, исчезающие в нуле и подлежащие дальнейшим ограничениям.

Сменим обозначения для $y_{2+3\sigma} = \vartheta_{\sigma+1}$ и переменим нумерацию таким образом, что абсолютные и относительные интегралы примут вид

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}_1 &\equiv \varphi_1 (y_r, \sigma_3) = 0\ \ (r = \overline{7,8}), \\ \widetilde{\Psi}_2 &\equiv \varphi_2 (y_j, y_r, \sigma_3, \vartheta_k) = 0\ \ (j = \overline{4,6}), \\ \widetilde{\Psi}_3 &\equiv \varphi_3 (y_j, \vartheta_k) = 0\ \ (k = \overline{0,2}), \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\vartheta_k = \text{const}, \ \|\xi\|^2 = \sum_{m=1}^{8} y_m^2 + \Phi_0(\vartheta_k) = \text{const}. \qquad (1.19), (1.20)$$

Используя теорему о неявных функциях, можно выделить ветвь решений уравнений (1.18), выражающую функции y_5, y_6 через остальные аргументы y_4, ϑ_k, y_r и исчезающую вместе с ними:

$$y_5 = y_5^0(y_4, \vartheta_k, y_r), \quad y_6 = y_6^0(y_4, \vartheta_k, y_r), \qquad (1.21)$$

на которой функция $\|\xi\|^2$, определенная равенством (1.20), зависит от величин $y_4, y_r, y_i, \vartheta_k$ $(i = \overline{1,3})$. Производная функции $\|\xi\|$ определяется, согласно уравнениям (1.0), (1.1), (1.2), (1.3) статьи [9] и соотношениям (1.20), (1.21), из равенства

$$d\|\xi\|/dt = \|\xi\|^{-1}[y_i w_i + (n_{j-4}\partial\Phi_0/\partial\vartheta_{j-4} + y_j)w_j], \qquad (1.22)$$

где приняты следующие обозначения:

$$w_i = \lambda_{(i)}u_{(i)} + \mu_{(i)}v_{(i)}, \quad w_j = \nu_{(j-3)}^{-1}v_{(j-3)},$$
$$\lambda_{(i)} = -(\nu_{i,0}\nu_i)^{-1}[a_{(i)}^{''-1}(1-\varepsilon_{(i)})b_{(i)}^{''} + a_{(i)}^{''}\varepsilon_{(i)}^2(1-\varepsilon_{(i)})b_{(i)}^{''-1}], \qquad (1.23)$$
$$\mu_{(i)} = \varepsilon_{(i)}(1-\varepsilon_{(i)})^{-1}b_{(i)}^{''-1}a_{(i)}^{''}\nu_{(i)}^{-1}, \ n_{j-4} = -0{,}5\nu_{j-3,0}^{-1}.$$

Введем в рассмотрение «новое» время τ, определив его уравнением

$$d\tau = \|\xi'\|\,\|\xi\|^{-1}dt, \qquad (1.24)$$

что эквивалентно выбору в качестве функций $A(x)$ выражения $\|\xi'\|\,\|\xi\|^{-1}$, приводящего к сохранению всех результатов работ [1, 8] с критериями вида (1.1), (1.2), (1.3) при $A(x) \equiv 1$ и $F_2(\|x\|) = F_2(\|\xi\|)$ для нового независимого переменного τ. Здесь

$$\|\xi'\|^2 = \sum_{i,j}^{3,6}[y_i^2 + (n_{j-4}\partial\Phi_0/\partial\vartheta_{j-4} + y_j)^2].$$

Отметим, что в постановке, обследованной в статье [8], экстремали Эйлера, предложенные для критерия (1.3), являются характеристиками следующего уравнения Беллмана:

$$\partial S/\partial t + F_2(y) + \min_v[F_1(v) - v|\partial S/\partial y|] = 0; \ S = S(y,t),$$
$$0 \leqslant v \leqslant M, \ y^2 = \|\xi\|^2, \ v^2 = \|w\|^2 = \sum_{i,j}^{3,6}(w_i^2 + w_j^2), \ y(T) = 0; \ S(0,T) = 0. \qquad (1.25)$$

Для критериев (1.1), (1.2) производящая функция Беллмана S, которая решает уравнение (1.25), может быть представлена произведением $S_1(t)S_2(y)$. Воспользуемся этими замечаниями при рассмотрении задачи наискорейшей стабилизации решения (1.0), для которой уравнение Беллмана, согласно (1.22) и (1.25), можно записать так:

$$(dS/dy)y^{-1}\min_{w\in\Omega} < \xi', w > = -1, \ \xi' = \{y_i, n_{j-4}\partial\Phi_0/\partial\vartheta_{j-4} + y_j\}, \qquad (1.26)$$

где под замкнутой областью Ω будем понимать шар с центром в нуле и с радиусом W_0, зависящим от $t, y, \|\xi'\|, S$, что соответствует принятому определению норм-ограниченного регулятора.

Исходя из уравнения (1.26), приходим к следующему выражению для оптимального управления:

$$w = -W_0 \xi' dS/dy [\|\xi'\| \, |dS/dy|]^{-1}, \tag{1.27}$$

в котором на основании свойств производных функций S и y можно опустить знак модуля. Функции y и S должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{gathered} dy/dt = -W_0(t, y, \|\xi'\|, S)\|\xi'\| y^{-1}, \\ dS/dy = W_0^{-1}(t, y, \|\xi'\|, S) y \|\xi'\|^{-1}, \\ S(y) > 0 \ (y \neq 0) \end{gathered} \tag{1.28}$$

и граничным условиям $y(\overline{T}) = 0$, $S(y(\overline{T})) = 0$ стабилизируемости и оптимальности для момента времени быстродействия $\overline{T}$.

Аналогичный подход можно осуществить для остальных критериев (1.2), (1.3), что, однако, связано с трудностями в вычислениях. Положим в частности, что $W_0 = y\|\xi'\|^{-1}$, а $\Phi_0 = \vartheta_0^2$. Тогда для задачи наискорейшей стабилизации имеем обобщение результата Атэнса [1], связанное с несколько необычным типом норм-ограничения, при котором положительно определенная квадратичная форма значений управлений u, v не должна превосходить некоторого отношения положительно определенной и неотрицательной квадратичной форм фазовых переменных различной размерности, причем коэффициенты форм легко указать, используя обозначения (1.23).

Если, однако, потребовать, чтобы $W_0 = M$ [1], то, исходя из второго уравнения системы (1.28), необходимо считать, что $\|\xi'\|^2 = \Phi_1(S, y)$, а это приводит, в свою очередь, к проблеме существования двух функций: Φ_0 и Φ_1, удовлетворяющих серии уравнений в частных производных, вытекающих из тождества по $y_i, y_r, y_4, \vartheta_k$, одно из которых имеет вид

$$(\partial\Phi_1/\partial S)^2 = 4M^2\Phi_1(1 - \partial\Phi_1/\partial y^2)^2,$$

а также к условию положительной определенности суммы (1.20) при замене (1.21) относительно переменных $y_4, y_i, y_r, \vartheta_k$ и равенств

$$y(T) = 0, \ S(0) = 0, \ S(y) > 0 \ (y \neq 0).$$

Предположение о том, что производящая функция Беллмана есть положительно определенная функция $S_0(\sum_{m=1}^{\infty} y_m^2, \vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2)$ всех относительных интегралов, здесь не рассматривается.

Несомненный интерес представит такой выбор параметров k, $\varepsilon_i = g_{(i)} G_{(i)}^{-1}$, при котором норм-ограничение на управление может быть геометрически выражено центральным эллипсоидом с некоторыми предписанными главными осями или с соответствующими собственными значениями. Выбор этих постоянных можно использовать для параметрической минимизации времени стабилизации.

2. Рассмотрим теперь вопрос о возможности локальной стабилизации гиростата в ньютоновском поле сил с помощью наименьшего числа маховиков, приводимых во вращение специальными двигателями, на мощность которых ограничения не налагаются. В дальнейшем будем использовать обозначения из работы [7]. Пусть сперва имеется гиростат с неподвижной точкой, по главным осям инерции которого расположены оси трех однородных симметричных маховиков. Неподвижная точка O совпадает с центром масс системы; $O\xi\eta\zeta$ — неподвижная система координат;

$Ox_1x_2x_3$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом и направленная по главным осям инерции (осям маховиков); p_1, p_2, p_3 — проекции абсолютной мгновенной угловой скорости тела на оси x_1, x_2, x_3; C_1, C_2, C_3 — моменты инерции системы относительно осей x_1, x_2, x_3; I_1, I_2, I_3 — осевые моменты инерции маховиков; w_1, w_2, w_3 — относительные угловые скорости маховиков; α_{ij} — направляющие косинусы между осями $O\xi\eta\zeta$ и $Ox_1x_2x_3$ $(i, j = \overline{1, 3})$. В задаче имеет место закон сохранения момента количества движения системы относительности оси $O\zeta$, что в проекции на оси $Ox_1x_2x_3$ дает лишь один интеграл

$$\sum_{i=1}^{3}(C_ip_i + I_iw_i)\,\alpha_{i3} = h. \tag{2.1}$$

Рассмотрим задачу о стабилизации невозмущенного движения

$$p_i = 0,\ \alpha_{ik} = 0,\ \alpha_{ii} = 1\ \ (i \neq k;\ i, k = \overline{1, 3}). \tag{2.2}$$

Примем в качестве управлений величины r_i, равные выражениям

$$\begin{aligned} r_1 &= -u_1 + \lambda_1 k_1 + k_2 p_3 + (k_1\alpha_{13} + k_2\alpha_{23})\,[1 + U(\alpha_{33})]\,p_2,\\ r_2 &= -u_2 + \lambda_2 k_2 - k_1 p_3 + (k_1\alpha_{13} + k_2\alpha_{23})\,[1 + U(\alpha_{33})]\,p_1, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$r_3 = -u_3 + \lambda_3 k_3 + k_1 p_2 - k_2 p_1, \tag{2.4}$$

в которых параметры λ_k вязкого трения в осях подшипников постоянны, $k_i = I_{(i)}w_{(i)}$, а сходящийся при $|\alpha_{33}| < 1$ ряд $U(\alpha_{33})$ равен сумме

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - \alpha_{33})^k.$$

Примечание 1. В формулах (2.3) для «новых» управлений можно было бы избежать членов с коэффициентами p_1 и p_2, если бы удалось доказать ограниченность переменных $|k_1|, |k_2|$ на отрезке $[t_0, \infty]$, необходимом для стабилизации переменных $p_i, \alpha_{ik}, \alpha_{ii}$. При таком «укороченном» преобразовании управлений из уравнений (3.1) [9] имеем для переменных k_1, k_2 уравнения

$$\begin{aligned} dk_1/dt - p_3k_2 &= -(\lambda_1\,dp_1/dt + r_1^0\,(p_1, p_2)),\\ dk_2/dt + p_3k_1 &= -(\lambda_2\,dp_2/dt + r_2^0\,(p_1, p_2)); \end{aligned} \tag{2.5}$$

$r_i^0\,(p_1, p_2)$ — «укороченные» управления.

Из решений однородных уравнений, соответствующих (2.5), имеем выражения величин k_1, k_2 через неопределенные функции $z(t), \varphi(t)$:

$$k_1 = z(t)\sin(\varphi + \mu),$$

$$k_2 = z(t)\cos(\varphi + \mu),$$

$$\mu(t) = \int_{t_0}^{t} p_3\,dt,$$

благодаря которым получаем для $k_1^2 + k_2^2$ значение

$$\{k_1(t_0) + (\lambda_2 p_2 \sin\mu - \lambda_1 p_1 \cos\mu)\Big|_{t_0}^{t} -$$

$$- \int_{t_0}^{t} [p_3(\lambda_1 p_1 \sin\mu + \lambda_2 p_2 \cos\mu) + r_1^0 \cos\mu - r_2^0 \sin\mu]\, dt\}^2 +$$

$$+ \{k_2(t_0) - (\lambda_1 p_1 \sin\mu + \lambda_2 p_2 \cos\mu)\Big|_{t_0}^{t} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [p_3(\lambda_1 p_1 \cos\mu - \lambda_2 p_2 \sin\mu) - (r_1^0 \sin\mu + r_2^0 \cos\mu)]\, dt\}^2.$$

Из последнего выражения следует, что для ограниченности функций k_1, k_2 достаточна ограниченность интегралов

$$\int_{t_0}^{\infty} |p_3|(\lambda_1 |p_1| + \lambda_2 |p_2|)\, dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} re^{i\psi} dt,$$

где

$$r^2 = r_1^{0\,2} + r_2^{0\,2}, \quad \psi(t) = \mu(t) + \arccos [r_1^0 r^{-1}],$$

которую можно достигнуть при надлежащей степени затухания p_1, p_2, p_3. Из интеграла (2.1) следует, что величина k_3, равная сумме

$$h - (C_1 p_1 \alpha_{13} + C_2 p_2 \alpha_{23} + C_3 p_3) +$$
$$+ [h - (C_1 p_1 \alpha_{13} + C_2 p_2 \alpha_{23})]\, U(\alpha_{33}) - (k_1 \alpha_{13} + k_2 \alpha_{23})[1 + U(\alpha_{33})],$$

заменяет k_3 в уравнениях для этого случая.

Система уравнений возмущенного движения, соответствующая решению (2.2) и уравнениям ((1.5), (1.7), (1.8) [10]), при $d\overline{R}/dt = 0$ распадается на три подсистемы, для первой из которых:

$$\begin{aligned} dp_1/dt &= h_1 p_2 + e_1 \alpha_{23} + P_1 + v_1, \\ dp_2/dt &= h_2 p_1 + e_2 \alpha_{13} + P_2 + v_2, \\ d\alpha_{13}/dt &= -p_2 + A_{13}, \\ d\alpha_{23}/dt &= p_1 + A_{23}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

приняты обозначения

$$\begin{aligned} h_1 &= h(I_1 - C_1)^{-1}, \; h_2 = h(C_2 - I_2)^{-1}, \; e_1 = c(C_3 - C_2)(C_1 - I_1)^{-1}, \\ e_2 &= (C_1 - C_3)(C_2 - I_2)^{-1}, \; c = 3\mu |R_0|^{-3}, \; v_i = r_i (C_i - I_i)^{-1} \; (i = \overline{1,2}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Вторая система представлена одним уравнением:

$$dp_3/dt = v_3 + P_3 \quad (v_3 = r_3(C_3 - I_3)^{-1}); \tag{2.8}$$

третья система уравнений соответствует «особенному» критическому случаю [11], так как имеет вид

$$\begin{aligned} d\alpha_{33}/dt &= A_{33}, \\ d\alpha_{ij}/dt &= A_{ij} + s_{ijk}(1 - \delta_{ij}) p_k. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$P_1 = \{[C_1 p_1 \alpha_{13} + C_2 p_2 \alpha_{23} + C_3 p_3 + (C_1 p_1 \alpha_{13} + C_2 p_2 \alpha_{23} - h)\, U^0(\alpha_{33})]\, p_2 +$$
$$+ (C_2 - C_3)(p_2 p_3 - c\, \alpha_{23} \alpha_{33})\}(C_1 - I_1)^{-1},$$

$$P_2 = \{[h - (C_1 p_1 \alpha_{13} + C_2 p_2 \alpha_{23})\, U^0(\alpha_{33}) - (C_1 p_1 \alpha_{13} + C_2 p_2 \alpha_{23} + C_3 p_3)]\, p_1 +$$
$$+ (C_3 - C_1)(p_1 p_3 - c\, \alpha_{13} \alpha_{33})\}(C_2 - I_2)^{-1},$$

$$P_3 = \{(C_1 - C_2)(p_1 p_2 - c\, \alpha_{13} \alpha_{23})\}(C_3 - I_3)^{-1},$$

$$U^0(\alpha_{33}) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \alpha_{33}^i;$$

$s_{ijk} = +1$ при четной подстановке индексов, $s_{ijk} = -1$ при нечетной ($k \neq i$; $k \neq j$; $j = \overline{1,2}$; $j = \overline{1,2}$; $i = \overline{1,3}$; $k = \overline{1,3}$). Члены A_{nm} исчезают при $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ и имеют относительно переменных второй порядок малости.

Из структуры уравнения (2.8) и системы (2.6) следует, что для стабилизации совокупной системы необходимы по крайней мере два маховика. Отметим, что рассмотрение подсистемы уравнений (2.8), (2.9) с целью асимптотической стабилизации переменных α_{12}, α_{21} ничего не дает.

Система уравнений первого приближения, соответствующая системе уравнений (2.6), имеет вид

$$dx/dt = Ax + Bu, \tag{2.10}$$

где матрицы A и B соответственно равны:

$$A = \begin{Vmatrix} 0, & h_1, & 0, & e_1 \\ h_2, & 0, & e_2, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ 1. & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим задачу о возможности стабилизации системы (2.10) посредством одного маховика, которая сводится здесь к вопросу существования чисел $b_j = \text{const}$ и соответствующих управлений $v_j = b_j v$, таких, что $v \neq 0$. Определитель v матрицы $\|b, Ab, A^2 b, \ldots, A^{n-1} b\|$ для системы (2.10) равен

$$v = (h_1 b_2^2 - h_2 b_1^2)(e_2 b_1^2 h_2 + e_1 b_2^2 h_1) - b_1^2 b_2^2 (e_1 + e_2)^2. \tag{2.12}$$

Введем обозначения для $(C_1 - I_1)^{-1} = d_1$, $(C_2 - I_2)^{-1} = d_2$, в которых выражение v, согласно (2.7) и (2.12), после деления на c приобретает вид

$$h^2(d_1 b_2^2 + d_2 b_1^2)\,[b_1^2 (C_3 - C_1) d_2^2 + b_2^2 (C_3 - C_2) d_1^2] - \\ - c b_1^2 b_2^2 [(C_3 - C_2) d_1 + (C_1 - C_3) d_2]^2. \tag{2.13}$$

Из выражения (2.13) следует, что в случаях

1) $C_1 = C_2 = C_3$,

2) $h = 0$, $(C_1 - C_3)(C_1 - I_1) + (C_3 - C_2)(C_2 - I_2) = 0$

значение v обращается в нуль при любом выборе b_1, b_2. Кроме того, при любом выборе b_1, b_2, если значение $D = b_1^2 (C_3 - C_1) d_2^2 + b_2^2 (C_3 - C_2) d_1^2 > 0$, существуют две поверхности начальных данных (при $h \neq 0$):

$$h_{1,2} = \mp c^{1/2} b_1 b_2 [(C_3 - C_1) d_1 + (C_1 - C_3) d_2] D^{-1/2} (d_1 b_2^2 + d_2 b_1^2)^{-1/2},$$

при которых исчезает величина v.

В остальных случаях стабилизация системы (2.10) одним маховиком оказывается возможной, в частности, для всех случаев, когда его расположение в осях x_1, x_2 подобрано так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$b_1^2 (C_3 - C_1) d_2^2 + b_2^2 (C_3 - C_2) d_1^2 < 0,$$

которое не существует лишь при одновременном выполнении неравенств

$$C_3 > C_1, \quad C_3 > C_2.$$

Для затухания переходного процесса по отклонению p_3 с декрементом χ_3 достаточно выбрать управление второго маховика, расположенного по оси x_3, таким, чтобы соблюдалось равенство $v_3 = -\chi_3 p_3$. Таким образом, во всех случаях, кроме перечисленных особенных, с помощью маховиков можно асимптотически стабилизировать решение (2.2) по переменным $p_1, p_2, p_3, \alpha_{13}, \alpha_{23}$; решение полной системы уравнений (2.6), (2.8), (2.9) устойчиво, так как система (2.9) является «особенной» в смысле [11] и гиростат G асимптотически приближается к одному из положений равновесия, лежащих в окрестности (2.2) малого радиуса.

Значения искомых управлений u зависят, согласно формулам (2.3) и (2.4), от нестабилизируемых переменных k.

Интересно отметить, что если управления u_i удовлетворяют равенствам

$$<I^{-1}\overline{k}, \overline{u}> = 0, \ <E\overline{k}, \overline{u} + E^{-1}[\overline{\Omega}, \overline{K} - \overline{k}]> = 0, \tag{2.14}$$

где тензор E определяется матрицей

$$E = \|e_{ij}\|, \ e_{ij} = 0 \ (i \neq j), \ e_{ii} = G_i/I_i; \ <x, y> = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

то существуют соответственно интегралы живых сил

$$<\overline{K} + \overline{k}, \overline{\Omega}> + <I^{-1}\overline{k}, \overline{k}> + 2c\sum_{i=1}^{3} C_i \alpha_{i3}^2 = h_2 \tag{2.15}$$

и

$$<\overline{K}, \overline{K}> - cABC <\overline{\gamma}, \overline{\gamma}> + <N^{1/2}\overline{k}, N^{1/2}\overline{k}> = h_3, \tag{2.16}$$

в которых приняты обозначения

$$\overline{\gamma} = \{\gamma_i\}, \quad \gamma_i = \alpha_{(i)3} C_{(i)}^{-1/2}, \quad N = E - E_0, \quad E_0 = \|\delta_{ij}\|.$$

Для того чтобы интегралы (2.15) и (2.16) могли существовать совместно, нужно использовать регулятор u, зависящий лишь от одной произвольной функции u_0 согласно равенству

$$\overline{u} = <\overline{k}, [\overline{K} - \overline{k}, \overline{\Omega}]> \{\|\overline{m}_1\|^2 \|\overline{m}_2\|^2 - <\overline{m}_1, \overline{m}_2>^2\}^{-1} \{\|\overline{m}_1\|^2 \overline{m}_2 - \\ - <\overline{m}_1, \overline{m}_2> \overline{m}_1\} + u_0 [\overline{m}_1, \overline{m}_2]. \tag{2.17}$$

Здесь

$$\overline{m}_1 = I^{-1}\overline{k}, \ \overline{m}_2 = E\overline{k}, \ \|m\|^2 = <m, m>.$$

Таким образом, если регулятор u удовлетворяет соотношению (2.17), то точки траектории в пространстве фазовых переменных всегда принадлежат пересечению поверхностей (2.1), (2.15), (2.16), определенных начальными возмущениями решения (2.2). Три таких интеграла, вообще говоря, позволяют исключить количества k_1, k_2, k_3 из уравнений системы (1.5), (1.7) [10] для случая $d\overline{R}/dt = 0$ в исследовании задачи, ограниченной, однако, условием выбора управлений согласно формуле (2.17), в которой значения k_1, k_2, k_3 следует заменить на соответствующие значения $k_i(p_1, p_2, p_3, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}, h_1, h_2, h_3)$, полученные из интегралов (2.1), (2.15), (2.16). Направление действия управления задано значениями возмущений и скалярной функции $u_0(p, \alpha_{i3})$, так что возможность стабилизации при ограничении (2.17) может быть проверена с помощью значения v для системы первого приближения пятого порядка (ввиду равенства нулю $2\alpha_{33} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3}^2$ на возмущенном движении).

Проведем обследование для случая стабилизации относительного равновесия гиростата с равномерно движущимся по круговой орбите центром масс, соответствующего решению (1.0), когда для управления используются только маховики.

При достаточно малых значениях возмущений переменные $\sigma_3, \beta_2, \beta_3$ можно исключить из уравнений с помощью интегралов (1.5)—(1.7), что позволит получить для возмущений систему уравнений первого приближения:

$$
\begin{aligned}
&dp_1/dt = \omega_0 a p_3 - 3\omega_0^2 a\sigma_2 + \nu_1,\\
&dp_2/dt = \omega_0^2 b\sigma_1 + \nu_2,\\
&dp_3/dt = \omega_0 e p_1 + \nu_3,\\
&d\sigma_1/dt = -p_2,\\
&d\sigma_2/dt = p_1 - \omega_0 \beta_1,\\
&d\beta_1/dt = p_3 + \omega_0 \sigma_2
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

в которой приняты следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
a = (C_2 - C_3)(C_1 - I_1)^{-1},\ b = 3(C_1 - C_3)(C_2 - I_2)^{-1},\ e = (C_1 - C_2)(C_3 - I_3)^{-1},\\
\nu_1 = (C_1 - I_1)^{-1}(-u_1 + \lambda_1 k_1 - \omega_0 k_3 + \omega_3 k_2 - \omega_2 k_3),\\
\nu_2 = (C_2 - I_2)^{-1}(-u_2 + \lambda_2 k_2 + \omega_1 k_3 - \omega_3 k_1),\\
\nu_3 = (C_3 - I_3)^{-1}(-u_3 + \lambda_3 k_3 + \omega_0 k_1 + \omega_2 k_1 - \omega_1 k_2).
\end{gathered}
\tag{2.19}
$$

С целью уменьшения числа констант, определяющих условие стабилизируемости, введем новые, безразмерные переменные по формулам:

$$
\tau = \omega_0 t,\ x_i = \omega_0^{-1} p_i,\ \{x_{3+i}\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \beta_1\},\ \nu_i = \omega_0^2 v_i\ \ (i = \overline{1, 3}),
$$

для которых, используя уравнения (2.18), получим систему

$$
dx/dt = A_1 x + P(x) + v,
\tag{2.20}
$$

где матрица A_1 определяется таблицей

$$
\left\|\begin{matrix}
0, & 0, & a, & 0, & -3a, & 0\\
0, & 0, & 0, & b, & 0, & 0\\
e, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\
0, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0\\
1, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1\\
0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0
\end{matrix}\right\|,
\tag{2.21}
$$

а вектор v — столбцом $[v_1, v_2, v_3, 0, 0, 0]^T$, причем $P(x)$ — вектор нелинейных членов, соответствующих первоначальной системе уравнений определяющих возмущения.

Рассмотрим вопрос о существовании одного маховика, стабилизирующего решение (1.0), которое в новых переменных примет вид

$$
x_1 = 1 - x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = x_5 = x_6 = 0.
$$

Аналогично предшествующему он сводится к условиям существования вектора $[b_1 v, b_2 v, b_3 v, 0, 0, 0]^T$, при котором не исчезает определитель V, равный для системы (2.20) с матрицей (2.21) значению

$$
V = b_2^2 \begin{vmatrix}
(v_{13} + b) b_1, & (v_{14} + b v_{12}) b_3, & (v_{15} - b^2) b_1, & (v_{16} - b^2 v_{12}) b_3\\
(v_{33} + b) b_3, & (v_{34} + b v_{32}) b_1, & (v_{35} - b^2) b_3, & (v_{36} - b^2 v_{32}) b_1\\
v_{53} b_3, & (v_{54} + b) b_1, & v_{55} b_3, & (v_{56} - b^2) b_1\\
v_{63} b_1, & (v_{64} + b) b_3, & v_{65} b_1, & (v_{66} - b^2) b_3
\end{vmatrix},
\tag{2.22}
$$

где постоянные имеют следующий смысл:

$$
\begin{gathered}
v_{13} = a(e-3),\ v_{14} + b v_{12} = a[a(e-3) + b + 3],\ v_{33} = ae,\ v_{53} = a - 1,\ v_{63} = e + 1,\\
v_{34} + b v_{32} = e[a(e-3) + b],\ v_{54} = a(e-3) - (e+1),\ v_{64} = a(e+1) + b - 1,\\
v_{15} = a[a(e-3)^2 + 3(e+1)],\ v_{35} = ae[a(e-3) + 3],\ v_{55} = (a-1)[a(e-3) - 1],\\
v_{65} = (e+1)[a(e-3) - 1],\ v_{66} = a[a(e-3) + 2](e+1) + 1,\\
v_{16} - b^2 v_{12} = a\{a(e-3)[a(e-3) + 3] + 3[a(e+1) - 1] - b^2\},\\
v_{36} - b^2 v_{32} = e\{a[a(e-3)^2 + 3(e+1)] - b^2\},\\
v_{56} = a^2(e-3)^2 + (e+1)[a(3-e) + 3a + 1].
\end{gathered}
\tag{2.23}
$$

Согласно формуле (2.22), маховик, стабилизирующий решение (1.0), должен быть расположен в теле гиростата таким образом, чтобы $b_2 \neq 0$ и $b_1^2 + b_3^2 \neq 0$, т. е. чтобы направляющий вектор оси имел ненулевую проекцию на ось x_2.

Раскроем определитель (2.22) для частных значений $b_1 = 1$, $b_3 = 0$, а затем для $b_1 = 0$, $b_3 = 1$, используя выражения (2.23) и допущенное таким образом упрощение относительно v, вообще однородного полинома шестой степени по b, символически равного $b_2^2 Q_4(b_1, b_3)$, где $Q_4(b_1, b_3)$ — однородный полином четвертой степени по указанным аргументам.

Тогда

$$Q_4(1, 0) = [v_{63}(v_{15} - b^2) - v_{65}(v_{13} + b)]\,[(v_{34} + bv_{32})(v_{56} - b^2) - (v_{54} + b)(v_{36} - b^2 v_{32})],$$

так что каждый из сомножителей должен быть отличным от нуля, если $v = 0$, что приводит к требованию одновременного выполнения неравенств:

$$e + 1 = 0, \tag{2.24}$$

$$e \neq 0, \tag{2.25}$$

$$a[4e + b(3 - e)] + b(1 - b) \neq 0. \tag{2.26}$$

Из неравенств (2.24)—(2.26) получаем следующее утверждение: решение (1.0) может быть стабилизировано одним маховиком, расположенным в плоскости $Ox_1 x_2$, если ось его не совпадает с осями Ox_1, Ox_2, а геометрия гиростата G удовлетворяет неравенствам (2.24)—(2.26).

Рассмотрим второй упрощенный случай, когда полином $Q_4(0, 1)$ равен выражению

$$[(v_{35} - b^2)v_{53} - (v_{33} + b)v_{55}]\,[(v_{14} + bv_{12})(v_{66} - b^2) - (v_{16} - b^2 v_{12})(v_{64} + b)]. \tag{2.27}$$

Из неравенства нулю первого сомножителя в (2.27) получаем условия

$$a - 1 \neq 0, \tag{2.28}$$

$$a[4e + b(3 - e)] + b(1 - b) \neq 0. \tag{2.29}$$

и так как второй сомножитель в (2.27) не обращается в нуль, то к (2.28) и (2.29) необходимо дополнительно присоединить лишь одно неравенство:

$$a \neq 0. \tag{2.30}$$

Таким образом, получаем второе утверждение: стабилизация одним маховиком, расположенным в плоскости $Ox_2 x_3$, с исключенными главными осями возможна, если одновременно выполняются неравенства (2.28) — (2.30) на геометрию масс гиростата G. Общее для упрощающих случаев неравенство (2.29) и (2.26), по-видимому, должно сохраниться и для обобщенного варианта, ограниченного, согласно предыдущему, лишь неравенством $b_1^2 + b_3^2 \neq 0$. Отметим, что, в отличие от условий стабилизации движения гиростата в ньютоновском поле сил с одной неподвижной точкой, для условий стабилизации относительного равновесия гиростата G в ньютоновском поле сил нет ограничений на начальные данные вращательного движения, причем последние условия не зависят от угловой скорости ω_0 равномерного движения по круговой орбите.

В обеих из рассмотренных постановок после установления возможности линейной стабилизации одним или двумя маховиками нетрудно подобрать такие режимы работы электродвигателей на маховики, которые обеспечат заданную степень χ_0 затухания переходного процесса. В свою очередь, свободные параметры этих задач — постоянные $I_i\, w_i(t_0)$ — можно установить с целью достижения возможно большего значения декремента затухания χ_0.

П р и м е ч а н и е 2. В пункте 1 не приводятся результаты, связанные с упрощающими возможностями, которые дают равенства $\vartheta_k(t_0) = 0$, а также не рассматривается метод малого параметра по отношению к переменным k_j в форме (1.8), хотя очевидно, что на «первой» стадии глобальной стабилизации эти переменные играют «малую» роль по отношению к производным от них по времени.

Примечание 3. Особенности норм-ограничения, используемого в пункте 1, являются следствием аддитивной формы (1.17), применяемой в работе для относительного интеграла и, вероятно, могут быть устранены при достаточно общих предположениях относительно функции Ф.

ЛИТЕРАТУРА

1. Athans M., Falb P., Lacoss R., IEEE Trans. on Automat. Control, AC-8, No. 3, 196 (1963).
2. Kumar K. S., IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, AES-1, No. 2, 82, 83 (1965).
3. Нисикава И., Хаяси К., Санномия Н., Механика, № 2(102) 43(1967).
4. Иослович И. В., Космические исследования, 4, вып. 4, 545 (1966).
5. Борщевский М. З., Иослович И. В., Космические исследования, 4, вып. 3, 344 (1966).
6. Летова Т. А., ПММ, 29, вып. 6, 1116 (1965).
7. Крементуло В. В., ПММ, 30, вып. 1, 42 (1966).
8. Kipiniak W., IEEE Trans. on Automat. Control., AC-9, No. 2, 188 (1964).
9. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 17, № 1, 3 (1968).
10. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 16, № 4, 540 (1966).
11. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, М., 1952.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/V 1968

I. KEIS

GÜROSTAADI SUHTELISE TASAKAALU OPTIMAALSEST ASÜMPTOOTILISEST STABILISEERIMISEST. III

Artiklis on Athans'i meetodil lahendatud gürostaadi suhtelise tasakaalu globaalse optimaalse stabiliseerimise ülesanne, lähtudes juhtimiste normile etteantud tõketest. Tõketeta kinnitatud gürostaadi puhul vaadeldavate eriliikumiste stabiliseerimise tingimused on esitatud nii ülesande lokaalse püstituse kui ka massikeskmes kinnitatud gürostaadi kohta.

I. KEIS

ON THE OPTIMAL STABILIZATION OF THE RELATIVE EQUILIBRIUM OF A STATIONARY GYROSTAT. III.

The paper presents the expressions for norm constraints which enable the realization of an Athans-type method for the synthesis of global gyrostat attitude control. Necessary conditions are put forward for the local stabilization problem as well as for a gyrostat with a single point fixed.