EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.2.03

МАРЕТ ТАММ

ЕСТЕСТВЕННОЕ НАЧАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ И АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Увеличения исходного числа неизвестных за счет искусственных неизвестных при составлении начального решения общей задачи линейного программирования можно избежать, если применить естественное начальное решение и оптимизацию по прямым и двойственным критериям. Для анализа чувствительности оптимального решения прямой задачи в отношении изменений свободных членов ограничений следует запомнить ход составления начального решения.

1. Естественное начальное решение

Под естественным начальным решением общей задачи линейного программирования понимается базисное решение, составленное только из исходных неизвестных и из тех добавочных неизвестных, с помощью которых неравенства превращаются в равенства.

Естественное начальное решение может быть составлено и применено следующим образом.

При включении в исходную симплексную матрицу неравенства типа

$$0 < b \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

не с применением искусственного неизвестного, а в виде неравенства с подходящим направлением знака неравенства

$$-b \geqslant -\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

следует применить алгоритм, в котором оптимизация происходит и по прямому, и по двойственному критериям. По С. Гассу [1], «существуют достаточно эффективные способы решения общей задачи линейного программирования, основанные на комбинированном использовании общего симплексного процесса и двойственного метода» (с. 178). Среди приведенных им библиографических ссылок нет ссылки на работу Гисена, посвященную составному симплексному алгоритму [2].

Для того чтобы при составлении начального базисного решения избежать в равенствах искусственных неизвестных, можно вместе с составным симплексным алгоритмом применить метод последовательного исключения.

Действительно, оптимизация по двойственному критерию устраняет отрицательные свободные члены, которые могут появиться при таком составлении начального базисного решения, а противоречивые и линейно зависимые ограничения-равенства выявляются в ходе исключения.

И. Калихман на с. 264—269 своего учебника [3] в одном примере для составления начального базисного решения вместе с общим симплексным методом применяет метод последовательного исключения. К сожалению, он не предупреждает читателя о возможности возникновения при этом описанных выше трудностей, а именно отрицательности свободных членов и линейной зависимости линейных форм.

2. Матричная схема хода решения

Излагаем описанный выше ход решения в матричном виде.

Обозначим матрицу коэффициентов целевой функции и ограничений задачи линейного программирования следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{P}_{q\times 1} & \overline{E}_q & \overline{F}_{q\times(m-q)} & \overline{B}_{q\times m} & \overline{D} \\ \overline{\overline{P}}_{(m-q)\times 1} & \overline{\overline{O}}_{(m-q)\times q} & \overline{\overline{F}}_{m-q} & \overline{\overline{B}}_{(m-q)\times m} & \overline{\overline{D}} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

или

$$A = \begin{pmatrix} \overline{P} & \overline{E} & \overline{F} & \overline{B} & \overline{D} \\ \overline{\overline{P}} & \overline{\overline{O}} & \overline{\overline{F}} & \overline{\overline{B}} & \overline{\overline{D}} \end{pmatrix}.$$

Здесь элементы первой строки блочной матрицы A состоят из коэффициентов целевой функции и бывших неравенств, дополненных до равенств, а элементы второй строки — из коэффициентов равенств. При этом P — столбец свободных членов; E — единичная матрица; O — нулевая матрица; F — столбцы, преобразуемые в единичные столбцы при составлении естественного начального решения; B — столбцы, входящие в оптимальный базис *; D — остальные столбцы.

Для получения естественного начального решения достаточно вычислить QA, где

$$Q = \begin{pmatrix} \overline{E} & -\overline{F}\overline{\overline{F}}^{-1} \\ \overline{\overline{O}} & \overline{\overline{F}}^{-1} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Действительно,

$$QA = \begin{pmatrix} \overline{P} - \overline{F}\overline{\overline{F}}^{-1}\overline{\overline{P}} & \overline{E} & \overline{O} & \overline{B} - \overline{F}\overline{\overline{F}}^{-1}\overline{\overline{B}} & \overline{D} - \overline{F}\overline{\overline{F}}^{-1}\overline{\overline{D}} \\ \overline{\overline{F}}^{-1}\overline{\overline{P}} & \overline{\overline{O}} & \overline{\overline{E}} & \overline{\overline{F}}^{-1}\overline{\overline{B}} & \overline{\overline{F}}^{-1}\overline{\overline{D}} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

или

$$QA = (\hat{P}_{m\times 1} \quad \hat{E}_m \quad \hat{B}_m \quad \hat{D}). \qquad (4)$$

---

* При таком обозначении некоторые столбцы матрицы B могут повториться и в матрицах E и F.

В практике умножение на Q осуществляется $m-q$ шагами исключения неизвестных.

Для получения оптимального решения помножим матрицу QA на матрицу $\hat{B}_m^{-1}$, т. е. осуществим симплексные преобразования:

$$\hat{B}^{-1}QA = (\hat{B}^{-1}\hat{P} \quad \hat{B}^{-1} \quad \hat{E} \quad \hat{B}^{-1}\hat{D}), \tag{5}$$

где столбец $\hat{B}^{-1}\hat{P}$ — оптимальное решение.

3. Анализ чувствительности оптимального решения при естественном начальном решении

При применении естественного начального решения на основании симплексной матрицы (5) в общем нельзя непосредственно получить оптимальное решение двойственной задачи, как это и отмечает Калихман [3]. Для этого он предлагает два способа. Первый из них требует дополнительно к решению исходной задачи еще решения системы из $m-1$ линейных уравнений с $m-1$ неизвестными, а второй — обращения матрицы порядка $m-1$.

Покажем, как получить решение двойственной задачи при естественном начальном решении с меньшей затратой дополнительного труда, чем по способам, предложенным Калихманом.

В случае общего симплексного метода с помощью двойственной задачи возможен анализ чувствительности решения прямой задачи. Исследуем вопрос о том, как влияют на оптимальное решение прямой задачи изменения свободных членов исходной системы ограничений при составном симплексном методе с естественным начальным решением.

Очевидно, векторный прирост ΔP столбца свободных членов может изменить только первый столбец матриц (1), (3), (4) и (5). Разложим прирост ΔP на сумму двух слагаемых:

$$\Delta P = \overline{\Delta}P + \overline{\overline{\Delta}}P,$$

где

$$\overline{\Delta}P = \begin{pmatrix} \Delta\overline{P} \\ \overline{\overline{O}} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\Delta}}P = \begin{pmatrix} \overline{O} \\ \Delta\overline{\overline{P}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Во-первых, исследуем влияние прироста $\overline{\Delta}P$, т. е. влияние изменений свободных членов неравенств. Так как первый столбец матрицы A примет теперь вид

$$\begin{pmatrix} \overline{P} + \Delta\overline{P} \\ \overline{\overline{P}} \end{pmatrix},$$

то первым столбцом QA будет

$$\begin{pmatrix} \overline{P} + \Delta\overline{P} - \overline{F}\overline{\overline{F}}^{-1}\overline{\overline{P}} \\ \overline{\overline{F}}^{-1}\overline{\overline{P}} \end{pmatrix}$$

или по (3) и (4)

$$\hat{P} + \overline{\Delta}P.$$

Вместо первого столбца матрицы $\hat{B}^{-1}QA$ получим теперь $\hat{B}^{-1}\hat{P} + \hat{B}^{-1}\overline{\Delta}P$, т. е. оптимальное решение $\hat{B}^{-1}\hat{P}$ получает прирост

$$\widehat{B}^{-1}\overline{\Delta}P,$$

который легко вычисляется на основании (5) и (6).

Во-вторых, исследуем влияние прироста $\overline{\overline{\Delta}}P$, т. е. влияние изменений свободных членов равенств на оптимальное решение задачи. Так как первый столбец матрицы A примет теперь вид

$$\begin{pmatrix} \overline{P} \\ \overline{\overline{P}} + \Delta\overline{\overline{P}} \end{pmatrix},$$

то первым столбцом матрицы QA будет

$$\begin{pmatrix} \overline{P} - \overline{F}\overline{\overline{F}}^{-1}(\overline{\overline{P}} + \Delta\overline{\overline{P}}) \\ \overline{\overline{F}}^{-1}(\overline{\overline{P}} + \Delta\overline{\overline{P}}) \end{pmatrix} \tag{7}$$

или, согласно (2), (3) и (4), $\widehat{P} + Q\overline{\overline{\Delta}}P$, где

$$Q\overline{\overline{\Delta}}P = \begin{pmatrix} -\overline{F}\overline{\overline{F}}^{-1}\Delta\overline{\overline{P}} \\ \overline{\overline{F}}^{-1}\Delta\overline{\overline{P}} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Вместо первого столбца матрицы $\widehat{B}^{-1}QA$ получим теперь $\widehat{B}^{-1}\widehat{P} + \widehat{B}^{-1}Q\overline{\overline{\Delta}}P$, т. е. оптимальное решение $\widehat{B}^{-1}\widehat{P}$ получает прирост

$$\widehat{B}^{-1}Q\overline{\overline{\Delta}}P.$$

В этом приросте встречается множитель Q, которого как элемента в конечной матрице (5) нет. Для получения Q надо сохранить преобразования, проводимые при составлении естественного начального решения. В силу (2) и (6) имеет смысл сохранить только второй столбец матрицы.

Если к матрице A прибавить столбец *

$$\begin{pmatrix} \overline{O} \\ \overline{\overline{E}} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

то к матрице QA прибавится второй столбец матрицы Q:

$$\begin{pmatrix} -\overline{F}\overline{\overline{F}}^{-1} \\ \overline{\overline{F}}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Покажем, что не следует сохранять (10). Разбиваем матрицу $\widehat{B}^{-1}$ на блоки:

$$\widehat{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{G} & \overline{H} \\ \overline{\overline{G}} & \overline{\overline{H}} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

---

* Исходное число неизвестных этим практически не увеличивается. Действительно, так как единичную матрицу начального базиса обычно в явном виде не сохраняют, то в ходе составления естественного начального решения исключается ровно столько же столбцов, сколько их прибавляется.

На основании (10) и (11) прибавляемый к матрице столбец $\hat{B}^{-1}QA$ имеет следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} -\bar{G}\bar{F}\bar{\bar{F}}^{-1}+\bar{H}\bar{F}^{-1} \\ -\bar{\bar{G}}\bar{F}\bar{\bar{F}}^{-1}+\bar{\bar{H}}\bar{F}^{-1} \end{Bmatrix}. \qquad (12)$$

С помощью (12) легко вычислить прирост $\hat{B}^{-1}Q\bar{\bar{\Delta}}P$. Действительно, по (8) и (11)

$$\hat{B}^{-1}Q\bar{\bar{\Delta}}P=\begin{Bmatrix} (-\bar{G}\bar{F}\bar{\bar{F}}^{-1}+\bar{H}\bar{\bar{F}}^{-1})\Delta\bar{\bar{P}} \\ (-\bar{\bar{G}}\bar{F}\bar{\bar{F}}^{-1}+\bar{\bar{H}}\bar{\bar{F}}^{-1})\Delta\bar{\bar{P}} \end{Bmatrix}.$$

Покажем еще, как найти решение двойственной задачи.

Числа, стоящие в первой строке * подматриц $\bar{G}$ и $(\bar{H}-\bar{G}\bar{F})\bar{F}^{-1}$ конечной матрицы (5), дополненной столбцом (12), являются оптимальными значениями двойственных неизвестных, причем первые из них соответствуют неравенствам, а остальные — равенствам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасс С., Линейное программирование (методы и приложения), М., 1961.
2. Giesen G., Unternehmensforschung, 5, Nr. 3, 132 (1961).
3. Калихман И. Л., Линейная алгебра и программирование, М., 1967.

Институт кибернетики Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию 21/VI 1968

MARET TAMM

LOOMULIK ALGLAHEND JA OPTIMAALSE LAHENDI TUNDLIKKUSE ANALÜÜS LINEAARPLANEERIMISE ÜLESANNETES

Tundmatute arvu suurenemist kunstlikkude tundmatute arvel saab üldises lineaarplaneerimise ülesandes vältida, kui kasutada loomulikku alglahendit ja optimiseerida nii primaarse kui ka duaalse kriteeriumi järgi. Et analüüsida primaarse ülesande optimaalse lahendi tundlikkust kitsenduste vabaliikmete muutude suhtes, tuleb meeles pidada alglahendi koostamise käik.

MARET TAMM

THE NATURAL INITIAL SOLUTION AND THE SENSITIVITY ANALYSIS OF THE OPTIMAL SOLUTION IN LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

It is possible to construct such an initial solution for a general linear programming problem that avoids an increasing of the number of the unknowns on account of the artificial ones. For this purpose, a natural initial solution and optimization with regard to the primal and dual criteria are used. It is shown that the sensitivity analysis of the optimal solution of a primal problem relative to variations of the absolute terms of constraints is possible by storing the process of the construction of the initial solution.

* Предполагается, что коэффициенты целевой функции стоят в первой строке матрицы A.