EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.2.02

С. УЛЬМ

ПОКОМПОНЕНТНЫЙ СПУСК И ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

1. Рассмотрим задачу нелинейного программирования: минимизировать функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x) \tag{1}$$

при условиях

$$x_i \in X_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где x_i — в общем векторы.

Для решения задачи (1)—(2) можно использовать метод покомпонентного спуска, состоящий в следующем:

если приближение $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ построено, то следующее приближение $x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)})$ строится посредством решения n задач минимизации $(i = 1, \ldots, n)$ меньшей размерности

$$\min_{x_i \in X_i} f(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i, x_{i+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}); \tag{3}$$

$k = 0, 1, \ldots;\ x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ — начальные приближения.

Сходимость метода изучена различными авторами [1—4]. В [1], например, доказана

Теорема. *Пусть $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая функция в области, содержащей множество $X = X_1 \times \ldots \times X_n$; $X_i (i = 1, \ldots, n)$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество.*

В этих предположениях

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = \min_{x \in X} f(x) = m. \tag{4}$$

2. При определенных структурах функций (1) метод (3) естественным образом порождает схемы иерархической оптимизации. На это обстоятельство было обращено внимание в нашей статье [5], где была рассмотрена задача (ср. [6])

$$\min \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i, u), \tag{5}$$

где $x_i \in X_i$; $u \in U$. (6)

Благодаря специфической структуре целевой функции (5) минимизацию по x_i $(i=1, \ldots, m)$ при применении метода (3) можно выполнить независимо и одновременно. Таким образом, получается следующая схема для решения задачи (5)—(6) на двух уровнях:

1° выбираем начальное приближение $u^{(0)} \in U$;

2° если построено приближение $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)}, u^{(k)})$, то $x^{(k+1)}$ строится по правилам:

а) подсистемы первого уровня решают задачи

$$\min_{x_i \in X_i} f_i(x_i, u^{(k)}) \qquad (i=1, \ldots, m), \tag{7}$$

решения которых берутся в качестве $x_i^{(k+1)}$;

б) второй уровень (центр) решает задачу

$$\min_{u \in U} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i^{(k+1)}, u), \tag{8}$$

решение которой дает $u^{(k+1)}$.

Данный подход можно легко обобщить для построения схем оптимизации на нескольких уровнях. Пусть, например, требуется решить задачу

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} f_{ij}(x_{ij}, x_i, u), \tag{9}$$

где

$$x_{ij} \in X_{ij};\; x_i \in X_i;\; u \in U. \tag{10}$$

В этом случае новое приближение $x^{(k+1)} = (x_{11}^{(k+1)}, \ldots, x_{mm_m}^{(k+1)}, x_1^{(k+1)}, \ldots, x_m^{(k+1)}, u^{(k+1)})$ строится по правилам:

а) подсистемы первого уровня решают задачи

$$\min_{x_{ij} \in X_{ij}} f_{ij}(x_{ij}, x_i^{(k)}, u^{(k)}) \qquad (i=1, \ldots, m;\; j=1, \ldots, m_i); \tag{11}$$

решения этих задач берем в качестве $x_{ij}^{(k+1)}$;

б) подсистемы второго уровня решают задачи

$$\min_{x_i \in X_i} \sum_{j=1}^{m_i} f_{ij}(x_{ij}^{(k+1)}, x_i, u^{(k)}) \qquad (i=1, \ldots, m), \tag{12}$$

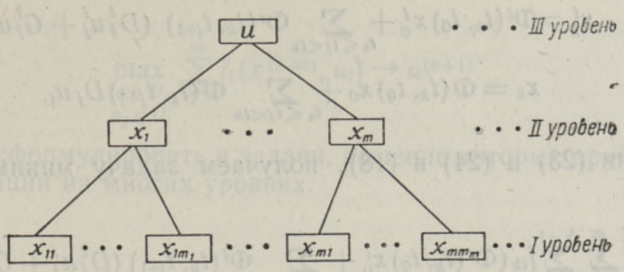
откуда получим $x_i^{(k+1)}$;

в) третий уровень (центр) для нахождения $u^{(k+1)}$ решает задачу

$$\min_{u \in U} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} f_{ij}(x_{ij}^{(k+1)}, x_i^{(k+1)}, u). \tag{13}$$

Процесс повторяется $(k=0, 1, \ldots)$.

Графически рассматриваемую схему оптимизации можно изобразить в виде нижеследующего прадерева (см. рисунок):



Нетрудно видеть, что для решения задачи

$$\min \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m_{i_1}} \cdots \sum_{i_{n-1}=1}^{m_{i_1 \ldots i_{n-2}}} f_{i_1 \ldots i_{n-1}}(x_{i_1 \ldots i_{n-1}}, \ldots, x_{i_1 i_2}, x_{i_1}, u), \tag{14}$$

где $x_{i_1 \ldots i_l} \in X_{i_1 \ldots i_l}$; $u \in U$, (15)

с помощью метода (3) получается схема оптимизации на n уровнях.

3. Рассмотрим применение метода (3) для оптимизации на двух уровнях дискретной динамической системы, состоящей из m независимых подсистем, подлежащих единому управлению из центра. Пусть система задана уравнениями $(i = 1, \ldots, m)$

$$x^i_{k+1} = C^i_k x^i_k + D^i_k u^i_k + G^i_k u_k;\ x^i_0 \text{ — заданы;} \tag{16}$$

$$x_{k+1} = C_k x_k + D_k u_k;\ x_0 \text{ — задана} \quad (k = 0, \ldots, N-1). \tag{17}$$

Здесь $x^i_k = x^i(t_k)$; $u^i_k = u^i(t_k)$; $x_k = x(t_k)$; $u = u(t_k)$ — векторы соответственно с размерностями n_i, r_i, n, r; $C^i_k, D^i_k, G^i_k, C_k, D_k$ — матрицы соответственно с размерностями $n_i \times n_i$, $n_i \times r_i$, $n_i \times r$, $n \times n$, $n \times r$; x^i_k — фазовые переменные i-й подсистемы; x_k — фазовые переменные центра; u^i_k — «собственные» управления i-й подсистемы; u_k — «центральные» управления.

Требуется минимизировать функцию

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{N-1} f_{ik}(x^i_k, u^i_k, x_k, u_k) + \sum_{i=1}^{m} f_{iN}(x^i_N) + f_N(x_N), \tag{18}$$

причем $u^i_k \in U^i$, $u_k \in U$.

Если через $\Phi^i(t_k, t_l)$ и $\Phi(t_k, t_l)$ обозначить соответственно матрицы перехода (transition matrix, см., напр., [7]) для i-й подсистемы и центра, т. е.

$$\Phi^i(t_k, t_k) = E^i; \tag{19}$$

$$\Phi(t_k, t_k) = E; \tag{20}$$

(E^i, E — единичные матрицы)

$$\Phi^i(t_{k+1}, t_l) = C^i_k \ldots C^i_l \quad (t_k \geqslant t_l); \tag{21}$$

$$\Phi(t_{k+1}, t_l) = C_k \ldots C_l \quad (t_k \geqslant t_l), \tag{22}$$

то уравнения (16) и (17) можно переписать в виде [7]

$$x_k^i = \Phi^i(t_k, t_0)\, x_0^i + \sum_{t_0 \leqslant t_j < t_k} \Phi^i(t_k, t_{j+1})\, (D_j^i u_j^i + G_j^i u_j); \tag{23}$$

$$x_k = \Phi(t_k, t_0)\, x_0 + \sum_{t_0 \leqslant t_j < t_k} \Phi(t_k, t_{j+1})\, D_j\, u_j. \tag{24}$$

Подставив (23) и (24) в (18), получаем задачу минимизации типа (5)—(6):

$$\min \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{N-1} f_{ik} \big(\Phi^i(t_k, t_0)\, x_0^i + \sum_{t_0 \leqslant t_j < t_k} \Phi^i(t_k, t_{j+1})\, (D_j^i u_j^i + G_j^i u_j),$$

$$u_k^i, \Phi(t_k, t_0)\, x_0 + \sum_{t_0 \leqslant t_j < t_k} \Phi(t_k, t_{j+1})\, D_j\, u_j, u_k\big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} f_{iN} \big(\Phi^i(t_N, t_0)\, x_0^i + \sum_{t_0 \leqslant t_j < t_N} \Phi^i(t_N, t_{j+1})\, (D_j^i u_j^i + G_j^i u_j)\big) +$$

$$+ f_N\big(\Phi(t_N, t_0)\, x_0 + \sum_{t_0 \leqslant t_j < t_N} \Phi(t_N, t_{j+1})\, D_j\, u_j\big) \Big\}, \tag{25}$$

причем в (5)—(6) x_i соответствуют управления u_k^i, а u — управления u_k.

Нетрудно построить и задачи оптимального управления, приводимые к задачам типа (9)—(10) или к еще более общим (типа (14)—(15)). Например, типа (9)—(10) является задача

$$x_{k+1}^{ij} = C_k^{ij}\, x_k^{ij} + D_k^{ij}\, u_k^{ij} + F_k^{ij}\, u_k^i + G_k^{ij}\, u_k; \tag{26}$$

$$x_{k+1}^i = C_k^i\, x_k^i + D_k^i\, u_k^i + G_k^i\, u_k; \tag{27}$$

$$x_{k+1} = C_k\, x_k + D_k\, u_k \tag{28}$$

$$(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, m_i;\ k = 0, \ldots, N-1);$$

$$\min \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=0}^{N-1} f_{ijk}\, (x_k^{ij}, u_k^{ij}, x_k^i, u_k^i, x_k, u_k) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} f_{ijN}\, (x_N^{ij}) + \sum_{i=1}^{m} f_{iN}\, (x_N^i) + f_N\, (x_N) \Big\}$$

$$(u_k^{ij} \in U^{ij};\ u_k^i \in U^i;\ u_k \in U). \tag{29}$$

4. Рассмотрим простую экономическую интерпретацию приведенных классов задач. Пусть имеются m объектов (подсистем), использующих различные (собственные) ресурсы $x_i \in X_i\, (i = 1, \ldots, m)$ и общий (центральный) ресурс $u = u_1 + \ldots + u_m \in U$; $u_i \in U_i$. Прибыль i-й подсистемы: $f_i(x_i, u_i)$; прибыль всей системы: $\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i, u_i)$. Решение задачи на двух уровнях:

а) подсистемы $(i = 1, \ldots, m)$:

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x_i, u_i^{(k)}) \to x_i^{(k+1)}; \tag{30}$$

б) центр:

$$\max_{\substack{u \in U \\ u_i \in U_i}} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i^{(k+1)}, u_i) \to u^{(k+1)}. \tag{31}$$

Нетрудно сформулировать и задачи, решение которых приводит к схемам оптимизации на многих уровнях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Авт. и телемех., **24**, № 12, 1643 (1963).
2. Warga J., J. Soc. Industr. Appl. Math., **11**, No. 3, 588 (1963).
3. Ермольев Ю. М., Мельник И. М., Экон. киберн. и исслед. опер., вып. 1, 88 (1967).
4. Гутер Р. С., Сб. Математические методы решения экономических задач, М., «Наука», 1968.
5. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, № 1, 3 (1969).
6. Findeisen W., Arch. Autom. i. Telemech., **12**, No. 4, 391 (1967).
7. Kalman R. E., Bertram J. E., Trans. of the ASME, Ser. D., J. Basic Engng, **82**, No. 2, 394 (1960).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
13/XI 1968

S. ULM

LANGUS KOMPONENTIDE JÄRGI JA HIERARHILINE OPTIMISEERIMINE

Artiklis konstrueeritakse mittelineaarse programmeerimise ja diskreetse optimaalse juhtimise ülesannete klassid, mille puhul langus komponentide järgi genereerib hierarhilised optimiseerimisskeemid.

S. ULM

COORDINATE-WISE DESCENT AND MULTILEVEL OPTIMIZATION

Some classes of nonlinear programming and discrete optimal control problems are constructed, for which the coordinate-wise descent method of solving generates multilevel schemes of optimization.