EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.2.01

Г. КАНГРО

О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ТИПА БОРА—ХАРДИ ДЛЯ ЗАДАННОЙ СКОРОСТИ. I

Пусть A — матричный метод суммирования последовательностей и $\lambda = \{\lambda_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Вводится понятие об A-суммируемости со скоростью λ, коротко A^λ-суммируемости. В случае метода взвешенных средних Рисса устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости класса (A, A^λ).

§ 1. Матричные преобразования класса (c^λ, c^μ)

Последовательность $x = \{\xi_k\}$ будем называть сходящейся со скоростью λ или просто λ-сходящейся, если существуют пределы *

$$\lim_k \xi_k = \xi, \quad \lim_k \beta_k = \beta, \tag{1}$$

где

$$\beta_k = \lambda_k(\xi_k - \xi). \tag{2}$$

Множество всех вещественных (или всех комплексных) λ-сходящихся последовательностей обозначим через c^λ. Если λ ограничена (например, если $\lambda_n = 1$), то $c^\lambda = c$, где c — множество всех вещественных (или всех комплексных) сходящихся последовательностей. Для произвольной λ имеем $c^\lambda \subset c$. В частности, последовательности

$$e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ нулей}}, 1, 0, \ldots),$$

$$e = (1, 1, \ldots 1, \ldots),$$

$$e^\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}, \ldots\right)$$

принадлежат множеству c^λ.

1. Ставим задачу: найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы матричное преобразование A, переводящее последовательность $x = \{\xi_k\}$ в последовательность $y = \{\eta_n\}$ с

$$\eta_n = \sum_k a_{nk} \xi_k, \tag{3}$$

---

* Все пределы в данной статье конечные.

принадлежало классу (c^λ, c^μ), т. е. удовлетворяло соотношению

$$A(c^\lambda) \subset c^\mu, \tag{4}$$

где $\mu = \{\mu_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел.

Поскольку $e_k, e, e^\lambda \in c^\lambda$, то для справедливости соотношения (4) необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} &A e_k \in c^\mu \qquad (k = 0, 1, \ldots), \\ &A e \in c^\mu, \\ &A e^\lambda \in c^\mu. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу второго из условий (5) ряд $\sum\limits_k a_{nk}$ сходится, вследствие чего мы можем переписать (3) в виде

$$\eta_n = \sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k} \beta_k + \xi \sum_k a_{nk}, \tag{6}$$

где ξ определяется первой из формул (1), а β_k — формулой (2). Ввиду второго из условий (5) существует предел $\lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk} = a$. Поэтому соотношение

$$A(c^\lambda) \subset c$$

(более слабое, чем (4)) имеет место тогда и только тогда, когда преобразование последовательностей с матрицей (a_{nk}/λ_k) сохраняет сходимость. Для этого, согласно теореме Кожима—Шура (см. [1], с. 12—13), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{aligned} &\exists \lim_n a_{nk} = a_k \qquad (k = 0, 1, \ldots), \\ &\exists \lim_n \sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k} = a^\lambda, \\ &\sum_k \frac{|a_{nk}|}{\lambda_k} = O(1), \end{aligned} \tag{7}$$

первые два из которых вытекают соответственно из первого и третьего условий (5). При этом из (6) следует

$$\eta = \lim_n \eta_n = a^\lambda \beta + \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} (\beta_k - \beta) + a\xi,$$

где β определяется второй из формул (1). Отсюда и из (6) находим

$$\mu_n(\eta_n - \eta) = \sum_k \mu_n \frac{a_{nk} - a_k}{\lambda_k} (\beta_k - \beta) + \mu_n \Big(\sum_k a_{nk} - a\Big) \xi + $$
$$+ \mu_n \Big(\sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k} - a^\lambda\Big) \beta. \tag{8}$$

В силу условий (5) пределы последних двух членов в правой части равенства (8) существуют. Поэтому соотношение (4) справедливо (при выполнении условий (5) и (7)) тогда и только тогда, когда преобразование последовательностей с матрицей

$$\left(\mu_n \frac{a_{nk} - a_k}{\lambda_k}\right)$$

переводит все последовательности, сходящиеся к нулю, в сходящиеся же последовательности. Для этого необходимо и достаточно выполнение условий (см. [1], с. 14)

$$\begin{gathered}\exists \lim_n \mu_n (a_{nk} - a_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots), \\ \mu_n \sum_k \frac{|a_{nk} - a_k|}{\lambda_k} = O(1),\end{gathered} \tag{9}$$

первое из которых совпадает с первым из условий (5). Тем самым выполнение условий (5), (7) и (9) необходимо и достаточно для справедливости соотношения (4). Заменяя (на основе (9)), условие (7) условием $\sum_k |a_k| / \lambda_k < \infty$, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Матричное преобразование $A = (a_{nk})$ принадлежит классу (c^λ, c^μ) тогда и только тогда, когда*

1° $Ae_k \in c^\mu$ $(k = 0, 1, \ldots)$,

2° $Ae \in c^\mu$,

3° $Ae^\lambda \in c^\mu$,

4° $\sum_k \frac{|a_k|}{\lambda_k} < \infty$,

5° $\mu_n \sum_k \frac{|a_{nk} - a_k|}{\lambda_k} = O(1)$,

где* $a_k = \lim_n a_{nk}$.

Если $A \in (c^\lambda, c^\mu)$, то для любого $x \in c^\lambda$ из формулы (8) следует

$$\gamma = \sum_k \alpha_k (\beta_k - \beta) + \lim_n \mu_n \Big(\sum_n a_{nk} - a\Big) \xi + \lim_n \mu_n \Big(\sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k} - a^\lambda\Big) \beta, \tag{10}$$

где

$$\gamma = \lim_n \mu_n (\eta_n - \eta), \ \alpha_k = \lim_n \mu_n \frac{a_{nk} - a_k}{\lambda_k}.$$

При $\lambda_n = \mu_n = 1$ из теоремы 1 вытекает теорема Кожима—Шура.

2. Будем говорить, что преобразование A сохраняет λ-сходимость или λ-консервативно, если $A \in (c^\lambda, c^\lambda)$, и улучшает λ-сходимость, если $A \in (c^\lambda, c^\mu)$ при некоторой μ с $\lim_n \mu_n / \lambda_n = \infty$. Покажем, что преобразование A, улучшающее λ-сходимость, удовлетворяет условию

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} |a_{nk} - a_k| = 0. \tag{11}$$

---

* Существование предела a_k следует из условия 1°.

Действительно, предположим, что условие (11) не выполняется. Тогда существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и индексы ν_n такие, что

$$\sum_{k=0}^{\nu_n} |a_{\nu_n k} - a_k| \geqslant \varepsilon_0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\nu_n} \frac{|a_{\nu_n k} - a_k|}{\lambda_k} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{\lambda_{\nu_n}}.$$

Ввиду условия 5° теоремы 1 отсюда вытекает

$$\frac{\varepsilon_0}{\lambda_{\nu_n}} = O\left(\frac{1}{\mu_{\nu_n}}\right).$$

Поскольку полученное условие противоречит условию $\lim\limits_n \mu_n/\lambda_n = \infty$, то равенство (11) справедливо.

Из равенства (11) вытекает, что если консервативное треугольное преобразование A улучшает λ-сходимость, то A является конулевым, т. е.

$$a = \sum_k a_k.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что регулярное треугольное преобразование не может улучшать λ-сходимость. Поскольку каждое преобразование, улучшающее λ-сходимость, λ-консервативно, то возникает вопрос о существовании λ-консервативных регулярных треугольных преобразований. Ответ на этот вопрос будет положительным.

Рассмотрим, например, регулярный метод взвешенных средних Рисса $P = (R, p_n)$ с

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{P_n}, & k \leqslant n \\ 0, & k > n, \end{cases} \tag{12}$$

где $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k$. Согласно теореме 1, регулярный метод P является λ-консервативным тогда и только тогда, когда выполнены условия *

$$\exists \lim_n \frac{\lambda_n}{P_n},$$

$$\exists \lim_n \frac{\lambda_n}{P_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k}, \tag{13}$$

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|p_k|}{\lambda_k} = O(P_n).$$

---

* Второе из условий (13) получается из условия 3° теоремы 1, если иметь в виду, что в случае $\lambda_n \to \infty$ из третьего условия (13) вытекает

$$a^\lambda = \lim_n \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k} = 0.$$

Если $p_n \geqslant 0$ $(n = 0, 1, \dots)$, то первое и третье из условий (13) вытекают из второго и, следовательно, второе из условий (13) необходимо и достаточно для λ-консервативности регулярного метода P. В частности, ввиду асимптотической формулы

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{\gamma}} \sim \frac{1}{1-\gamma} (n+1)^{1-\gamma} \quad (0 < \gamma < 1),$$

метод арифметических средних $(R, 1)$ $(p_n = 1)$ λ-консервативен, если $\lambda_n = (n+1)^{\gamma}$ $(0 < \gamma < 1)$, а, ввиду асимптотической формулы

$$(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \sim \alpha\, (n+1),^{\alpha-1}$$

метод Зигмунда (Z, α) $(p_n = (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha})$ λ-консервативен при $\lambda_n = (n+1)^{\alpha-1}$ $(\alpha > 1)$.

§ 2. Множители суммируемости класса (A, A^{λ})

Пусть матричный метод суммирования A задан преобразованием (3). Последовательность $x = \{\xi_k\}$ будем называть λ-*суммируемой методом* A или просто A^{λ}-*суммируемой*, если $Ax \in c^{\lambda}$, т. е. если последовательность $y = \{\eta_n\}$ является λ-сходящейся. Согласно общему определению множителей суммируемости будем называть числа ε_n *множителями суммируемости класса* (A, A^{λ}) и писать $\varepsilon_n \in (A, A^{\lambda})$, если для каждого A-суммируемого ряда $\sum u_n$ ряд $\sum \varepsilon_n u_n$ окажется A^{λ}-суммируемым. Теорема 1 дает возможность применять метод обратного преобразования (см [1], с. 151—152) для нахождения множителей суммируемости класса (A, A^{λ}).

Пусть A — нормальный метод суммирования, заданный с помощью преобразования ряда в последовательность матрицей (α_{nk}). Тогда A-суммируемость ряда $\sum u_n$ означает сходимость последовательности $\{\xi_n\}$ с

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} u_k. \tag{14}$$

Обозначив

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} \varepsilon_k u_k,$$

мы с помощью преобразования

$$u_k = \sum_{\nu=0}^{k} \alpha'_{k\nu} \xi_{\nu},$$

обратного к (14), находим

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \xi_k, \tag{15}$$

где

$$c_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \alpha_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \alpha'_{\nu k}. \tag{16}$$

Обозначим через C преобразование последовательностей, определенное формулой (15). В этом случае $\varepsilon_n \in (A, A^{\lambda})$ тогда и только тогда, когда $C \in (c, c^\lambda)$. Для соотношения $C \in (c, c^\lambda)$, согласно теореме 1, необходимо и достаточно выполнение условий *

$$Ce_k \in c^\lambda \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$Ce \in c^\lambda,$$

$$\lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| = O(1), \tag{17}$$

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} |c_{nk} - c_k| = O(1),$$

где $c_k = \lim\limits_n c_{nk}$.

Предположим, далее, что метод A удовлетворяет условию $\alpha_{n0} = 1$. Тогда (см. [1], с. 51)

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha'_{nk} = \delta_{n0},$$

где δ_{nk} — символ Кронекера. Ввиду этого нетрудно установить формулу

$$\sum_{k=0}^{n} c_{nk} = \varepsilon_0. \tag{18}$$

Вследствие (18) второе из условий (17) выполнено. Тем самым мы можем сформулировать следующую лемму.

Лемма 1. *Если метод A нормален и удовлетворяет условию $\alpha_{n0} = 1$, то $\varepsilon_n \in (A, A^\lambda)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

1° $\exists \lim\limits_n \lambda_n (c_{nk} - c_k) \quad (k = 0, 1, \ldots)$,

2° $\lambda_n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |c_k| = O(1)$,

3° $\lambda_n \sum\limits_{k=0}^{n} |c_{nk} - c_k| = O(1)$,

где c_{nk} определяются формулой (16), *а* $c_k = \lim\limits_n c_{nk}$.

Лемма 2. *Если метод A регулярен и удовлетворяет условию $\alpha_{n0} = 1$, то для соотношения $\varepsilon_n \in (A, A^\lambda)$ необходимо выполнение условий*

$$\exists \lim_n \lambda_n (1 - \alpha_{nk}) \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{19}$$

$$\lambda_n \varepsilon_{n+1} = O(1). \tag{20}$$

Доказательство. В силу регулярности метода A из соотношения $\varepsilon_n \in (A, A_\lambda)$ следует $\varepsilon_n \in (E, A^\lambda)$, где E — метод сходимости. На основе теоремы 1 нетрудно видеть, что соотношение $\varepsilon_n \in (E, A^\lambda)$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия 1° — 3° леммы 1 при

$$c_{nk} = \Delta_k (\alpha_{nk} \varepsilon_k).$$

---

* Применяя теорему 1, следует положить

$$a_{nk} = \begin{cases} c_{nk}, & k \leqslant n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Последнюю формулу можно получить из (16), если учитывать, что при $A = E$ имеем

$$\alpha'_{kk} = 1,\ \alpha'_{k+1,\,k} = -1,\ \alpha'_{\nu k} = 0 \text{ для } \nu > k+1.$$

Если иметь в виду, что

$$c_{nk} - c_k = \Delta_k[(\alpha_{nk} - 1)\varepsilon_k],$$

то (19) следует из условия 1° леммы 1, а (20) — из условия, вытекающего из 3° леммы 1:

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} (c_{nk} - c_k) = O(1).$$

§ 3. Множители суммируемости класса (P, P^λ)

Применяя лемму 1 к методу взвешенных средних Рисса $P = (R, p_n)$ с

$$\alpha_{nk} = 1 - \frac{P_{k-1}}{P_n} \quad (P_{-1} = 0),$$

докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если метод P регулярен, $p_n \neq 0$ и числа $0 < \lambda_n \uparrow$ удовлетворяют условию**

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|p_k|}{\lambda_k} = O(P_n), \tag{21}$$

то $\varepsilon_n \in (P, P^\lambda)$ тогда и только тогда, когда

1° $\exists \lim\limits_n \dfrac{\lambda_n}{P_n}\varepsilon_k \ (k = 1, 2, \ldots)$,

2° $\lambda_n \varepsilon_{n+1} = O(1)$,

3° $\lambda_n P_{n-1} \dfrac{\Delta \varepsilon_n}{p_n} = O(1)$,

4° $\lambda_n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \left| P_k \Delta \dfrac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| = O(1)$,

5° $\lambda_n \sum\limits_{k=1}^{n} \left| P_{k-1} P_k \Delta \dfrac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| = O(P_n)$.

Доказательство. Так как в случае метода P имеем (см. [1], с. 108)

$$\alpha'_{nk} = \frac{P_k}{p_k},\ \alpha'_{k+1,\,k} = -P_k\left(\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k+1}}\right),\ \alpha'_{k+2,\,k} = \frac{P_k}{p_{k+1}},$$

$$\alpha'_{nk} = 0 \text{ при } n > k+2,$$

то при $A = P$ формула (16) дает

$$c_{nk} = P_k \Delta \frac{\Delta(\alpha_{nk}\varepsilon_k)}{p_k}, \tag{22}$$

* Условие (21) выполнено, если метод P является λ-консервативным.

откуда

$$c_k = P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k}. \tag{23}$$

Необходимость. Пусть $\varepsilon_n \in (P, P^\lambda)$. Тогда условия 1° и 2° непосредственно следуют соответственно из условий (19) и (20). Условие 3° получается из условия

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n-1} (c_{nk} - c_k) = O(1),$$

вытекающего из условия 3° леммы 1. При этом следует иметь в виду формулы

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} = \varepsilon_0 - \varepsilon_n, \quad \sum_{k=0}^{n-1} c_k = \varepsilon_0 - \varepsilon_n - P_{n-1} \frac{\Delta \varepsilon_n}{p_n}, \tag{24}$$

из которых первая вытекает из (18), а вторая выводится применением преобразования Абеля к сумме

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta \varepsilon_k = \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k}.$$

Условие 4° теоремы непосредственно вытекает из условия 2° леммы 1.

Применяя формулу разности произведения, мы с помощью формул (22) и (23) находим

$$c_{nk} - c_k = (a_{nk} - 1) P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} + (a_{nk} + a_{n,k+1}) P_k \frac{\Delta \varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}} + P_k \Delta_k \frac{a_{nk}}{p_k} \cdot \varepsilon_{k+1}, \tag{25}$$

где a_{nk} определяются формулой (12). В силу условия 3° и предположения (21) имеем

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \left| (a_{nk} + a_{n,k+1}) P_k \frac{\Delta \varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}} \right| \leqslant \lambda_n \sum_{k=0}^{n} (|a_{nk}| + |a_{n,k+1}|) O\left(\frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) = O(1),$$

а в силу условия 2°

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \left| P_k \Delta_k \frac{a_{nk}}{p_k} \cdot \varepsilon_{k+1} \right| = \lambda_n |\varepsilon_{n+1}| = O(1).$$

Поэтому из равенства (25) на основе условия 3° леммы 1 вытекает

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} |1 - a_{nk}| \left| P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| = O(1),$$

т. е. условие 5°.

Достаточность. В предположении, что условия 1°—5° теоремы 2 выполнены, покажем выполнимость условий 1°—3° леммы 1.

Из равенства (25) с помощью условия 1° теоремы заключаем о выполнении условия 1° леммы 1. Выполнение же условия 2° леммы 1 непосредственно вытекает из условия 4° теоремы.

Из равенства (25) следует неравенство

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} | c_{nk} - c_k | \leqslant \frac{\lambda_n}{|P_n|} \sum_{k=1}^{n} \left| P_{k-1} P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| +$$

$$+ \lambda_n \sum_{k=0}^{n} \left| (a_{nk} + a_{n,k+1}) P_k \frac{\Delta \varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}} \right| + \lambda_n | \varepsilon_{n+1} |,$$

откуда, ввиду условий 2°, 3° и 5° и предположения (21), получается выполнение условия 3° леммы 1.

Примечание 1. В частном случае $\lambda_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ условие 4° влечет за собой условие 5° и из теоремы 2 вытекает известная теорема Бора—Харди для метода взвешенных средних Рисса [2].

Примечание 2. Если $\lambda_n \uparrow \infty$, а P_n и $\Delta \frac{\Delta \varepsilon_n}{p_n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ сохраняют знаки, то условия 4° и 5° теоремы 2 вытекают из условий 2° и 3°. Действительно, с помощью второй из формул (24), ввиду условий 2° и 3°, находим

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} = \varepsilon_{n+1} + P_n \frac{\Delta \varepsilon_{n+1}}{p_{n+1}}.$$

Поскольку $P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k}$ сохраняет знак, то отсюда, ввиду условий 2° и 3°, следует условие 4°. Выполнение же условия 5° вытекает из тождества

$$\sum_{k=0}^{n} P_{k-1} P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \left(\varepsilon_{k+1} - P_k \frac{\Delta \varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}} \right) - P_n \left(\varepsilon_{n+1} + P_n \frac{\Delta \varepsilon_{n+1}}{p_{n+1}} \right),$$

получаемого с помощью преобразования Абеля в силу второй из формул (24), ввиду условий 2°, 3° и предположения (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Тарту, 1966.
2. Jurkat W., Peyerimhoff A., Math. Z., **55**, 102 (1952).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 12/VII 1968

G. KANGRO

BOHR-HARDY TÜÜPI SUMMEERUVUSTEGUREIST ANTUD KIIRUSE PUHUL. I

Jada $x = \{\xi_n\}$ nimetame koonduvaks kiirusega $\lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow)$ ehk lühidalt λ-koonduvaks, kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_n \lambda_n (\xi_n - \xi) \quad (\xi = \lim_n \xi_n),$$

ja λ-summeeruvaks maatriksmenetlusega A ehk A^{λ}-summeeruvaks, kui jada Ax on λ-koonduv. On leitud efektiivsed tarvilikud ja piisavad tingimused (A, A^{λ})-tüüpi summeeruvustegurite jaoks juhul, kui A on Rieszi kaalutud keskmiste menetlus.

G. KANGRO

ON THE SUMMABILITY FACTORS OF THE BOHR-HARDY TYPE FOR A GIVEN RAPIDITY. I

A sequence $x=\{\xi_n\}$ is called convergent with the rapidity $\lambda=\{\lambda_n\}(0<\lambda_n\uparrow)$ or briefly λ-convergent if the finite limit

$$\lim_n \lambda_n(\xi_n-\xi) \quad (\xi=\lim_n \xi_n)$$

exists, and λ-summable by a matrix method A or A^λ-summable if the sequence Ax is λ-convergent. Effective necessary and sufficient conditions for summability factors of the type (A, A^λ) are found, A being the Riesz method of weighted means.