В итоге мы имеем нижеследующую оценку для времени колебательной релаксации локального колебания ν_2 в возбужденном электронном состоянии молекулы NO_2^- в кристалле KCl с первого уровня на нулевой:

$$\tau_{10} = (1{,}7 \pm 0{,}8) \cdot 10^{-11}\ \textit{сек.}$$

При частоте $\nu_2 = 600\ \textit{см}^{-1}$ данное время жизни составляет около 300 периодов колебания. Учитывая, что в KCl возможен распад кванта колебания ν_2 не меньше, чем на три фонона кристаллических колебаний, полученный результат представляется разумным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ребане Л., Авармаа Р., Изв. АН ЭССР. Физика * Математика, 17, № 1, 120—123 (1968); Ребане К. К., Авармаа Р. А., Ребане Л. А., Изв. АН СССР. Сер. физ. (в печати).
2. Авармаа Р., Изв. АН ЭССР. Физика * Математика, 17, № 1, 78—82 (1968).
3. Rebane K., Hizhnyakov V., Tehver I., Изв. АН ЭССР. Физика * Математика, 16, № 2, 207 (1967); Hizhnyakov V., Tehver I., Phys. stat. sol., 21, 2 (1967); Техвер И. Ю., Диссертация, ИФА АН ЭССР, Тарту, 1968.
4. Брандмюллер И., Мозер Г., Введение в спектроскопию комбинационного рассеяния света, М., 1964, с. 522.

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
16/II 1968

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.2.16

С. УЛЬМ, Х. КОППЕЛЬ

НЕКОТОРЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ТИПА ЭЙТКЕНА СО СХОДИМОСТЬЮ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

S. ULM, H. KOPPEL. MONINGAD AITKENI TÜÜPI KOLMANDA JÄRGU KOONDUVUSEGA ITERATSIOONIMEETODID

S. ULM, H. KOPPEL. ON SOME AITKEN TYPE ITERATION METHODS WITH CUBICAL CONVERGENCE

Обобщенный метод Эйткена для решения нелинейного операторного уравнения

$$F(x) \equiv x - \Phi(x) = 0 \tag{1}$$

имеет вид [1]

$$x_{n+1} = x_n - [E - U(V(x_n)x_n)]^{-1}(x_n - U(x_n)), \tag{2}$$

где $U(x_n)$ и $V(x_n)$ — некоторые итерационные методы для решения уравнения (1); E — единичный оператор; $U(x'x'')$ — разделенная разность оператора U.

В статьях [2–6] была исследована сходимость обобщенного метода Стеффенсена, являющегося частным случаем метода (2),

$$U(x) = V(x) = \Phi(x).$$

В настоящей заметке исследуется сходимость двух частных случаев метода (2), т. е.

$$x_{n+1} = x_n - \overline{\Lambda}_n F(x_n), \tag{3}$$

где

$$\overline{\Lambda}_n = [F(W(x_n)x_n)]^{-1};\ W(x_n) = x_n - \Lambda_n F(x_n);\ \Lambda_n = [F(\Phi(x_n)x_n)]^{-1}$$

и

$$x_{n+1} = x_n - [E - W(W(x_n)x_n)]^{-1}(x_n - W(x_n)) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4}$$

Как видно, метод (3) получается из (2) при $U(x) = \Phi(x)$ и $V(x) = W(x)$, а метод (4) — при $U(x) = V(x) = W(x)$, где $W(x)$ — оператор, определяющий метод Стеффенсена.

Отметим, что по существу метод (3) совпадает с методом хорд для решения уравнения (1), если только на каждом итерационном шаге в качестве исходных приближений выбирать величины x_n и $W(x_n)$. Другими словами, для решения уравнения (1) поочередно применяются методы хорд и Стеффенсена.

Сформулируем теорему о сходимости метода (3).

Теорема 1. *Пусть*

1° $\|x_0 - \Phi(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

2° *для каждого* x', x'', x''' *из сферы*

$$\|x - x_0\| \leqslant R = \max\{B\eta_0(S_0 + 1);\ (MBS_0 + 1)\eta_0\} \tag{5}$$

справедливы оценки

а) $\|[E - \Phi(x'x'')]^{-1}\| \leqslant B$;

б) $\|\Phi(x'x'')\| \leqslant M$;

в) $\|\Phi(x'x''x''')_i\| \leqslant K \quad (i = 1, 2)$*;

3° $k_0 = KB^2\sqrt{M}\,\eta_0 \leqslant 1$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant r = \min\{B\eta_0 S_0;\ (MBS_0 + 1)\eta_0\}$$

решение x^*, *к которому последовательность* (3) *сходится со скоростью*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B\eta_0 S_n = B\eta_0 \sum_{i=n}^{\infty} k_0^{3^i - 1} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 2 из [5].

Отметим, что аналогично можно доказать также теорему о квадра-

* Через $\Phi(x'x''x''')_i$ $(i = 1, 2)$ обозначены вторые разделенные разности оператора Φ [7].

тичной сходимости метода Стеффенсена, только в этом случае R и r несколько изменяются, а условие 3° заменяется условием

$$KB^2M\eta_0 \leqslant 1.$$

Итак, при $M > 1$ комбинированный метод (3) имеет в общем более широкую область сходимости, чем метод Стеффенсена.

Предполагая существование решения x^* уравнения (1), докажем теперь теорему о сходимости метода (4). Более подробно метод (4) выражается в виде

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n \overline{\Lambda}_n (E - \Phi(v_n w_n))(x_n - w_n), \tag{6}$$

где

$$\Gamma_n = [E - \overline{\Lambda}_n G_n (w_n - x_n)]^{-1}; \; u_n = \Phi(x_n); \; w_n = W(x_n); \; v_n = \Phi(w_n);$$

$$G_n = \Phi(v_n w_n x_n)_1 + \Phi(v_n u_n x_n)_2 \Phi(w_n x_n).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 2° а), б), в) *теоремы* 1:

$$B^2K\varrho[KM\varrho + (BKM\varrho + 1)(1+M)^2] < 1$$

и уравнение (1) *имеет решение в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant \varrho,$$

причем в качестве сферы (5) *выбрана сфера*

$$\|x - x_0\| \leqslant (1+\alpha)\varrho, \tag{7}$$

где

$$\alpha = \max\{l^2\varrho;\; M;\; BKM\varrho;\; BKM^2\varrho\}.$$

Тогда последовательность (6) *сходится к решению* x^* *уравнения* (1) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{l}(l\varrho)^{3^n} \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{8}$$

где

$$l = BK\sqrt{\frac{M[1 + (1+M)^2 B]}{1 - B^2K(1+M)^2\varrho}}.$$

Доказательство. На основании формулы (6) после некоторых преобразований получим

$$x^* - x_{n+1} = \Gamma_n \overline{\Lambda}_n [\Phi(x^* w_n x_n) - G_n \Lambda_n (E - \Phi(x^* x_n))](x^* - w_n)(x^* - x_n).$$

По теореме Банаха

$$\|\Gamma_n\| \leqslant \frac{1}{1 - B^2K(1+M)^2\varrho}.$$

Так как

$$\|x^* - w_n\| \leqslant BKM\|x^* - x_n\|^2,$$

то

$$\|x^* - x_{n+1}\| \leqslant \frac{B^2K^2M[1 + B(1+M)^2]\,\|x^* - x_n\|^3}{1 - B^2K(1+M)^2\varrho} = l^2\|x^* - x_n\|^3 \leqslant \frac{1}{l}(l\varrho)^{3^{n+1}}, \tag{9}$$

т. е. справедлива оценка (8). Поскольку $l\varrho < 1$, то, переходя в формуле (9) к пределу $(n \to \infty)$, найдем, что $x_n \to x^*$. Легко показать принадлежность элементов x_n, u_n, w_n и v_n сфере (7).

Теорема доказана.

Следует отметить, что в теоремах 1 и 2 нет необходимости в ограниченности норм третьих разделенных разностей (или третьих производных) оператора, как это обычно требуется в теоремах о сходимости методов третьего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коппель Х. К., Тр. ТПИ. Сер. А, № 261 (1968).
2. Chen Kuo-Wang, Comment. math. Univ. Carolinae, 5, No. 2, 47 (1964).
3. Ульм С. Ю., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 4, № 6, 1093 (1964).
4. Бельтюков Б. А., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 5, № 5, 927 (1965).
5. Коппель Х. К., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 15, № 4, 531 (1966).
6. Коппель Х. К., Тр. ТПИ. Сер. А, № 251, 45 (1967).
7. Ульм С. Ю., Изв. АН ЭССР. Физика * Математика, 16, № 2, 146 (1967).

Институт кибернетики АН ЭССР
Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
25/III 1968

KROONIKAT * ХРОНИКА

ПРИСВОЕНИЕ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ

В истекшем году и в первом квартале 1968 года в Совете Отделения физико-технических и математических наук АН ЭССР были защищены 18 кандидатских и одна докторская диссертация.

После реорганизации Совета в июне 1967 ряд специальностей по химическим и геологическим наукам был передан в ведение Совета химико-технологических и биологических наук АН ЭССР.

В настоящее время Совет Отделения физико-технических и математических наук принимает к защите диссертации на соискание следующих ученых степеней:

доктора и кандидата физико-математических наук по специальностям: вычислительная математика, теория упругости и пластичности, электрофизика;

кандидата физико-математических наук по специальности теоретическая кибернетика;

доктора и кандидата технических наук по специальности теоретические основы теплотехники.

За указанный срок было присуждено ученых степеней:

доктора физико-математических наук — 1,

кандидата геолого-минералогических наук — 3,

кандидата химических наук — 3,

кандидата технических наук — 8,

кандидата физико-математических наук — 4.

Ученая степень **доктора физико-математических наук** присуждена Айнола Лео Яновичу, старшему научному сотруднику Института кибернетики АН ЭССР, успеш-