

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.2.06>

Ю. УДЕР

## ОБ АБЕРРАЦИЯХ В ГОЛОГРАФИИ

В работе обсуждаются aberrации высших порядков голографических изображений и искажения реконструированных волновых фронтов ввиду зависимости амплитуды от пространственных координат и векториальности световых полей.

Целью настоящей статьи является, во-первых, определение aberrаций высших порядков при выполнении условий, уничтожающих aberrации третьего порядка; во-вторых, определение искажений в голографических изображениях, вызванных зависимостью амплитуд волны от пространственных координат и векториальностью световых полей.

В процессе восстановления волновых фронтов Д. Габора [1, 2] получают трехмерное изображение предмета. Сам процесс состоит из двух частей [3-6]. В первой из них на фотопластинке регистрируется изображение дифракционной картины Френеля — получается голограмма (рис. 1, I, II). Во второй с помощью полученного фотоснимка воссоздается ранее отраженный от предмета или прошедший через предмет волновой фронт (рис. 1, III). Этот новый двухступенчатый способ получения изображения, при котором не используются никакие устройства, способные дать изображение, получил название фотографирования посредством восстановления волнового фронта [6], или голографии [7-10].

Одним из возможных применений этого метода с момента его появления считают микроскопию [1, 2, 11, 12]. В данной статье проблемы микроскопии не обсуждаются, а рассматривается способ изготовления голограммы, происходящий из микроскопии [13, 7].

Обозначим комплексную амплитуду электромагнитных колебаний на фотопластинке, вызванных волной, отраженной предметом, буквой  $o$ , а соответствующую амплитуду опорного пучка — буквой  $r$ . В процессе восстановления (или в процессе реконструкции) волнового фронта голограмму освещают когерентным светом. Обозначим амплитуду этой волны буквой  $s$ . Для краткости в дальнейшем будем называть эти волны соответственно  $o$ -,  $r$ - и  $s$ -волнами.

Согласно внесенным обозначениям, после соответствующей экспозиции и обработки фотопластинки амплитудный коэффициент пропускания голограммы вычисляется по формуле

$$d \sim |o + r|^2 = |o|^2 + |r|^2 + o^* r + o r^*.$$

В процессе восстановления из голограммы выходит волна, имеющая непосредственно на поверхности голограммы амплитуду

$$H \sim c(|o|^2 + |r|^2) + co^*r + cor^* = H_D + H_R + H_V,$$

где

$$H_D = c(|o|^2 + |r|^2);$$

$$H_R = co^*r; \quad (1)$$

$$H_V = cor^*. \quad (2)$$

$H_D$  характеризует «шум» процесса восстановления,  $H_R$  соответствует волновому фронту, дающему действительное изображение, и  $H_V$  — волновому фронту, выходящему из мнимого изображения [3, 4]. На рис. 1, III эти волны обозначены соответственно:  $PRP'R'$ ,  $PRBA$  и  $PRP''R''$ .

Для дальнейшего полезно сделать упрощение, которое не уменьшает цену последующих вычислений. За объект фотографирования выбираем точечный рассеиватель света. Тогда как  $r$  и  $c$ , так и  $o$  представляют собой комплексную амплитуду сферических электромагнитных волн на фотопластинке. Выбрав за начало координатной системы  $x y z$  центральную точку голограммы (рис. 1), можно вычислить относительно этой точки фазу колебаний для каждой волны [7]:

$$\varphi_r(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2 + z_r^2} - \sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2} \right]; \quad (3)$$

$$\varphi_o(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + z_o^2} - \sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2} \right]; \quad (4)$$

$$\varphi_c(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda_c} \left[ \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + z_c^2} - \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} \right], \quad (5)$$

где  $F_1(x_r, y_r, -z_r)$  и  $F_3(x_c, y_c, -z_c)$  обозначают центры кривизны сферических  $r$ - и  $c$ -волн и  $(x_o, y_o, -z_o)$  являются координатами объекта фотографирования (рис. 1).

Пользуясь выражениями (1)–(5), фазу волновых колебаний  $H_V$  и  $H_R$  можно записать так:

$$\Phi = \varphi_c \pm \varphi_o \mp \varphi_r, \quad (6)$$

где верхние знаки, как здесь, так и в дальнейшем, соответствуют мнимому, а нижние — действительному изображению.

Если процесс восстановления проходит в совершенстве, то как мнимое, так и действительное изображения являются точечными и выражение (6) должно характеризовать фазу сферической волны. Если обозначить координаты изображения буквами  $(a, b, z)$ , то при свободных от aberrаций изображениях должно выполняться равенство

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_c} \left[ \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + b^2 + z^2} \right]. \quad (7)$$

В общем, стигматические изображения не возникают и равенство (7) не действует. В случае, если можно записать неравенства

$$\begin{aligned} z^2 &\gg (x - a)^2 + (y - b)^2; \\ z_c^2 &\gg (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2; \\ z_r^2 &\gg (x - x_r)^2 + (y - y_r)^2; \\ z_o^2 &\gg (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

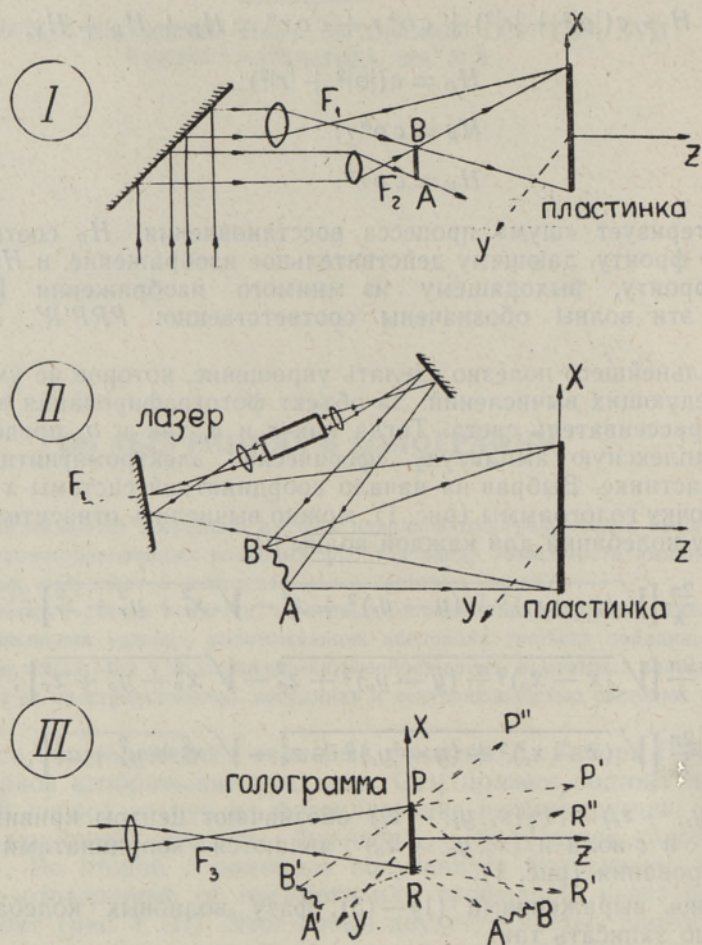


Рис. 1. I — изготовление голограммы в свете, проходящем через предмет; II — то же в свете, отраженном от предмета; III — процесс восстановления.

то радикалы в выражениях (3), (4), (5) и (7) можно разложить в ряды, и в первом приближении равенство (10) действует, если [7]

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{m^2 x_c z_o z_r \pm \mu m x_o z_c z_r \mp \mu m x_r z_c z_o}{m^2 z_o z_r \pm \mu z_c z_r \mp \mu z_c z_o}; \\
 b &= \frac{m^2 y_c z_o z_r \pm \mu m y_o z_c z_r \mp \mu m y_r z_c z_o}{m^2 z_o z_r \pm \mu z_c z_r \mp \mu z_c z_o}; \\
 z &= \frac{m^2 z_c z_r z_o}{m^2 z_o z_r \pm \mu z_c z_r \mp \mu z_c z_o}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь введено обозначение  $\mu = \frac{\lambda_c}{\lambda}$  и  $m$  показывает, во сколько раз увеличена голограмма перед процессом восстановления.

Выражения (9) определяют местонахождение изображения и показывают зависимость координат изображения от координат предмета.

Р. Майер [7] нашел aberrации третьего порядка для изображения,

местонахождение которого определено выражениями (9), и показал, что абберации третьего порядка исчезают, если процесс восстановления соответствует следующим условиям:

$$z_r = z_o; \quad (10) \quad \frac{x_c}{z_c} = \pm \frac{x_r}{z_r}; \quad (13)$$

$$z_c = \pm \mu z_o; \quad (11) \quad \frac{y_c}{z_c} = \pm \frac{y_r}{z_r}; \quad (14)$$

$$m = \mu; \quad (12)$$

или 
$$z_c = z_r = \infty; \quad m = \mu; \quad (15)$$

$$\frac{x_c}{z_c} = \pm \frac{x_r}{z_r}; \quad \frac{y_c}{z_c} = \pm \frac{y_r}{z_r}.$$

Интересно, как при этих условиях будут выражаться абберации высших порядков?

Если условия (8) не выполнены, т. е.

$$z_o^2 \gtrsim (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 \quad \text{и т. д.,}$$

то должна учитываться зависимость как фазы, так и амплитуды волн от пространственных координат. Иначе говоря, нужно учитывать, что точечные источники света равномерно не освещают поверхность фотопластинки и голограммы. Если условия (8) не выполнены, то нельзя не учитывать векторную структуру электромагнитных полей. Какие искажения в изображениях вызывает учет зависимости амплитуды волн от пространственных координат и векториальности колебаний?

### 1. Абберации высшего порядка

Абберации третьего порядка Р. Майер [7] измерял разностью в третьих членах разложений фазового распределения на голограмме (6) и на так называемой сфере Гаусса (7) [7, 14]. Абберации высшего порядка могли бы измеряться разностью в четвертых, пятых и т. д. членах разложений. Но нет смысла вычислять такие разности в общем виде, так как они интересуют нас только при условиях (10)—(14) или (15).

Если абберации третьего порядка равны нулю, т. е. действуют условия (10)—(14) или (15), то выражения для пространственных координат изображения можно упростить. Получаем:

$$a = \mu x_o;$$

$$b = \mu y_o;$$

$$z = \pm \mu z_o.$$

Учитывая последние соотношения и условия (10)—(14) или (15) в формулах (3)—(5) и (7), можем непосредственно убедиться в точном действии формулы (6). Следовательно, условия (10)—(14) или (15) обращают в нуль абберации не только третьего, но и любого порядка.

Условия (10) и (11) не удовлетворяются одновременно для всех точек пространственного объекта. Поэтому голография в сферических волнах применима только при плоскостных предметах, т. е. в микроскопии.

Так как условия (10)—(14) или (15) не удовлетворяются одновременно для мнимого и действительного изображений, то и абerrации этих изображений нельзя одновременно обратить в нуль. При уменьшении абerrаций одного изображения абerrации другого будут расти и наоборот. Однако в одном частном случае можно устранить абerrации обоих изображений. Это возможно при следующих условиях:

$$\begin{aligned}
 (11) \quad z_r = z_c = \infty; \quad \frac{y_r}{z_r} = 0; \\
 m = \mu; \quad \frac{x_c}{z_c} = 0; \\
 \frac{x_r}{z_r} = 0; \quad \frac{y_c}{z_c} = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Мнимое и действительное изображения являются стигматическими, если освещать голограмму как при изготовлении, так и при реконструкции перпендикулярными коллимированными  $r$ - и  $c$ -волнами. Для того чтобы изображения были хорошо разграниченными, т. е. чтобы они могли наблюдаться с разных направлений [3, 4], объект должен отстоять как можно дальше от  $z$ -оси. Но, с другой стороны, большой угол падения света ( $o$ -волны) вызывает слишком тонкую интерференционную картину, и процесс фотографирования не регистрирует ее.

## 2. Учет амплитудных изменений

Так как  $c$ ,  $o$  и  $r$  представляют собой комплексные амплитуды сферических волн, то учитывая уменьшение амплитуды этих волн на пути их распространения, волновые фронты  $H_V$  и  $H_R$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 H_{V,R} = \frac{C_0 e^{-i(\varphi_c \pm \varphi_o \mp \varphi_r)}}{\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + z_c^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{m} - x_r\right)^2 + \left(\frac{y}{m} - y_r\right)^2 + z_r^2}} \times \\
 \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{m} - x_o\right)^2 + \left(\frac{y}{m} - y_o\right)^2 + z_o^2}}, \tag{17}
 \end{aligned}$$

где  $C_0$  есть комплексное число. Остальные обозначения имеют прежние значения. В то же время выражение (17) должно давать на голограмме распределение комплексной амплитуды сферической волны, сосредотачивающейся в одной точке (действительное изображение) или выходящей из одной точки (мнимое изображение):

$$H'_{V,R} = \frac{C e^{-i\Phi}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}},$$

где  $C$  есть комплексное число.

Если условия (10)—(14) останутся в силе, то  $\Phi = \varphi_c \pm \varphi_o \mp \varphi_r$  и равенство (17) можно представить в виде

$$H_{V,R} = \frac{C_0}{C} \frac{\mu^2}{(x - \mu x_r)^2 + (y - \mu y_r)^2 + \mu^2 z_r^2} \cdot H'_{V,R}.$$

Из полученного выражения видно, что учет амплитудных изменений вызывает в процессе реконструкции изменения волновых фронтов, эквивалентные действию нейтрального фильтра абсорбции с амплитудным коэффициентом пропускания

$$d \approx d_{\max} \left[ 1 - \frac{(x - \mu x_r)^2 + (y - \mu y_r)^2}{\mu^2 z_r^2} \right], \quad (18)$$

где  $d_{\max}$  зависит только от техники обработки фотопластинки и освещенности в процессе восстановления. Таким образом, например, мнимое изображение наблюдается через голограмму, как через закоптелое стекло, наиболее прозрачное в точке

$$x = \mu x_r;$$

$$y = \mu y_r.$$

Результат (18) не зависит от координат объекта и поэтому действителен и для пространственных объектов. Если при записывании и освещении голограммы в процессе восстановления применять коллимированный свет, т. е. если действуют условия (15), то прозрачность «фильтра» постоянна и зависит только от техники фотографирования и освещенности голограммы в процессе восстановления.

### 3. Учет векториальности волновых колебаний

При выполнении условий (8) и при одинаковой поляризуемости  $r$ - и  $o$ -волн электромагнитные колебания на поверхности голограммы происходят практически в одном направлении. Поэтому падающий на голограмму свет можно рассматривать как совокупность скалярных волн. Недействительность условий (8) и неодинаковая поляризация  $r$ - и  $o$ -волн требуют учета векториальности световых колебаний в теории голографических изображений.

Пусть источник света (или точечный рассеиватель света) находится в точке  $O(x_0, y_0, -z_0)$  (рис. 2) и вектор  $\mathbf{p}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  определяет направление световых колебаний в данной точке. При этом  $|\mathbf{p}| = 1$ . Тогда амплитуду колебаний на поверхности  $z = 0$  в точке  $R$  (рис. 2) можно вычислить так:

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{E_0 (\mathbf{p} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R}}{R^3} \cdot e^{-ikR}, \quad (19)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  и  $E_0$  — комплексное число, зависящее от силы источника.

Перепишем выражение (19) в виде

$$\mathbf{E}(x, y) = E(x, y) \mathbf{e}(\cos A, \cos B, \cos C), \quad (20)$$

где  $\mathbf{e}$  есть единичный вектор с направляющими косинусами  $\cos A$ ,  $\cos B$  и  $\cos C$  вектора  $(\mathbf{p} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$ . В этом случае  $E(x, y)$  выражает амплитуду колебания в скалярной теории.

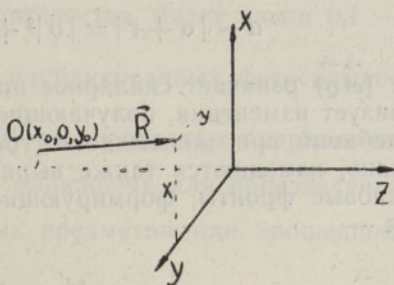


Рис. 2. Схема к примеру.

Обозначим направляющие косинусы вектора  $\mathbf{R}$  соответственно  $\cos \xi$ ,  $\cos \eta$  и  $\cos \delta$ . При действии закона рассеяния (19) направляющие косинусы вектора поля можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned}\cos A &= \cos \delta \cdot \cos Y - \cos \eta \cdot \cos Z; \\ \cos B &= \cos \xi \cdot \cos Z - \cos \delta \cdot \cos X; \\ \cos C &= \cos \eta \cdot \cos X - \cos \xi \cdot \cos Y,\end{aligned}\quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}\cos X &= \frac{\cos \beta \cdot \cos \delta - \cos \gamma \cdot \cos \eta}{\sin \Psi}; \\ \cos Y &= \frac{\cos \gamma \cdot \cos \xi - \cos \alpha \cdot \cos \delta}{\sin \Psi}; \\ \cos Z &= \frac{\cos \alpha \cdot \cos \eta - \cos \beta \cdot \cos \xi}{\sin \Psi}\end{aligned}\quad (22)$$

— направляющие косинусы вектора  $\mathbf{p} \times \mathbf{R}$  и  $\Psi$  угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{R}$ .

Вид записи (20) может быть применен не только для сферических волн вида (19), но и для любых волновых фронтов. Для  $o$ - и  $r$ -волн можем записать:

$$\mathbf{o} = o \cdot \vec{\omega}; \quad \mathbf{r} = r \cdot \vec{\varrho}.$$

В этом случае для коэффициента пропускания голограммы получаем

$$d \sim |\mathbf{o} + \mathbf{r}| = |o|^2 + |r|^2 + (o^* r + o r^*) \cdot (\vec{\omega} \vec{\varrho}),$$

где  $(\vec{\omega} \vec{\varrho})$  означает скалярное произведение. Сомножитель  $(\vec{\omega} \vec{\varrho})$  характеризует изменения, получающиеся в результате учета векториальности колебаний при записывании голограмм на фотопластинки. Следовательно, изменяются также выражения (1) и (2), которые определяют волновые фронты, формирующие действительное и мнимое изображения —

$$H'_R = (\vec{\omega} \vec{\varrho}) H_R;$$

$$H'_V = (\vec{\omega} \vec{\varrho}) H_V.$$

Последние изменения можно отождествить с изменениями, вызванными «закоптелостью» фотопластинки в такой степени, что прозрачность ее изменяется в  $(\vec{\omega} \vec{\varrho})$  раз. Если экспозиция происходит при условии (8), то в каждой точке поверхности голограммы векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varrho}$  будут практически параллельными, и следовательно,  $(\vec{\omega} \vec{\varrho}) = 1$ . Но если волновой фронт снимается на сравнительно близком расстоянии от предмета или если предмет значительно изменяет поляризацию света, то скалярное произведение  $(\vec{\omega} \vec{\varrho})$  нельзя считать равным единице.

Возьмем для примера конкретный случай. Пусть действуют условия (16). За объект фотографирования выбираем точечный рассеиватель в точке  $O(x_0, 0, -z_0)$ , обладающий законом рассеивания (19).

Пусть опорный пучок имеет плоскость поляризации  $y = 0$ , т. е.  $\vec{q} = \vec{q}(1, 0, 0)$  и  $\vec{p} = \vec{q}(1, 0, 0)$ , тогда можно получить равенство

$$(\vec{\omega} \vec{q}) = \cos A. \quad (23)$$

Согласно выбранному объекту, направляющие косинусы вектора  $\mathbf{R}$  определяются формулами

$$\cos \xi = \frac{x - x_0}{R}; \quad \cos \eta = \frac{y}{R}; \quad \cos \delta = \frac{z_0}{R} \quad (24)$$

и из соотношений (21) — (24) окончательно получаем

$$(\vec{\omega} \vec{q}) = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{y}{z_0}\right)^2}{1 + \frac{(x - x_0)^2 + y^2}{z_0^2}}}. \quad (25)$$

В случае, если  $z_0^2 \gg y^2 + (x - x_0)^2$ , то вместо (25) можно написать выражение

$$(\vec{\omega} \vec{q}) = 1 - \frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2}{z_0^2},$$

которое показывает, что «закоптелость» голограммы в первом приближении — параболическая с минимумом в точке  $x = x_0$ . Так, например,

$(\vec{\omega} \vec{q}) \approx 0,9$  в точке  $x = x_0 + \frac{1}{2}z_0$  и «закоптелость» будет равна 0,1 — десять процентов информации теряется.

«Закоптелость» ясно видна на краях опубликованных фотоснимков (см., например, [6, 15–20]).

В общем, конечно, формулы (21) — (22) не определяют направление вектора  $\vec{\omega}$  в пространстве, и нахождение выражения для произведения  $(\vec{\omega} \vec{q})$  требует точного знания отраженных предметом или прошедших через предмет волновых фронтов.

Автор приносит искреннюю благодарность члену-корреспонденту АН ЭССР П. Карду за обсуждение статьи и полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gabor D., Proc. Roy. Soc. (London), A 197, 454 (1949).
2. Gabor D., Proc. Roy. Soc. (London), B 64, 449 (1951).
3. Leith E., Upatnieks J., J. Opt. Soc. Am., 52, 1123 (1962).
4. Leith E., Upatnieks J., J. Opt. Soc. Am., 53, 1377 (1963).
5. Leith E., Upatnieks J., J. Opt. Soc. Am., 54, 1295 (1964).
6. Лейт Э., Упатниекс Ю., УФН, 87, 521 (1965).
7. Meier Reinhard W., J. Opt. Soc. Am., 55, 987 (1965).
8. Stroke G. W., Brumm D., Funkhouser A., J. Opt. Soc. Am., 55, 1327 (1965).
9. Meier Reinhard W., J. Opt. Soc. Am., 55, 1693 (1965).
10. Meier Reinhard W., J. Opt. Soc. Am., 56, 219 (1966).
11. Haine M. E., Mulvey T., J. Opt. Soc. Am., 42, 763 (1952).



12. Baez A. V., J. Opt. Soc. Am., **42**, 756 (1952).
13. Leith E., Upatnieks J., Haines K. A., J. Opt. Soc. Am., **55**, 981 (1965).
14. Champagne E., J. Opt. Soc. Am., **57**, 51 (1967).
15. Микаэлян А. Л., Борбинев В. И., ЖЭТФ. Письма, **4**, 172 (1966).
16. Grant R. M., Lille R. L., Barnett N. E., J. Opt. Soc. Am., **56**, 1142 (1966).
17. Steatson K. A., Powell R. L., J. Opt. Soc. Am., **56**, 1161 (1966).
18. Carter W. H., Dougal A. A., J. Opt. Soc. Am., **56**, 1754 (1966).
19. Stroke G. W., Funkhouser A., Leonard C., Indebetouw G., Zech R. G., J. Opt. Soc. Am., **57**, 110 (1967).
20. Hildebrand B. P., Haines K. A., J. Opt. Soc. Am., **57**, 155 (1967).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию  
20/XI 1967

*O. UDER*

### ABERRATSIOONIDEST HOLOGRAAFIAS

Artiklis näidatakse, et holograafiliste kujutiste skalaarses teoorias kaovad kõrge-  
mat järku aberratsioonid koos kolmandat järku aberratsioonidega. Uhtlasi hinnatakse  
moonutusi holograafilistes kujutistes, mis on tingitud valguslainete amplituudi olene-  
vusest ruumikoordinaatidest ja valgusvälja vektoriseloomust.

*O. UDER*

### ON ABERRATIONS IN HOLOGRAPHY

In the present paper it is shown that in the scalar theory of holographic images,  
higher-order aberrations disappear together with the third-order ones; the distortions  
of holographic images which are due to the spatial coordinate dependence of wave  
amplitude and to the vectorial character of light field have been evaluated.