EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.2.04

Ю. ЛЕМБРА, П. КЫЙВА

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОГИБАЮЩЕЙ ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ В СИЛЬНОФОКУСИРУЮЩЕМ УСКОРИТЕЛЕ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ УЧАСТКАМИ

Известно [1], что для определения огибающей траектории частиц в ускорителях достаточно знать, кроме начальных условий, лишь одну функцию — модуль функции Флоке уравнения бетатронных колебаний. Целью настоящей работы является вычисление модуля функции Флоке для сильнофокусирующего ускорителя с прямолинейными участками системы фодо в случае, более общем по сравнению с рассмотренным в [1]. В этой работе огибающая вычислена в предположении равенства абсолютных величин показателей магнитного поля и радиусов равновесной орбиты в фокусирующем и дефокусирующем секторах, а также равенства длин прямолинейных участков. В технике вычисления модуля функции Флоке авторы [1] оперируют громоздкими выражениями от комплексных величин.

В настоящей работе мы применяем матричный метод [2], позволяющий найти вещественную величину — модуль функции Флоке — непосредственно, что избавляет нас от промежуточных выкладок на основе громоздких комплексных выражений. Это позволяет легко освободиться от ограничений, налагаемых на характеристики магнитного поля в ускорителе, и получить модуль функции Флоке для системы фодо в наиболее общей форме.

Исходим из уравнения бетатронных колебаний [1]:

$$d^2y/d\sigma^2+g(\sigma)\,y=0, \tag{1}$$

где y — отклонение частицы от равновесной орбиты, σ — длина дуги равновесной орбиты. Функция $g(\sigma)$ определяется для системы фодо так:

$$g(\sigma)=\left\{\begin{array}{ll}(\varkappa_1/R_1)^2 & \text{в фокусирующем секторе}\\ 0 & \text{на первом прямолинейном участке}\\ -(\varkappa_2/R_2)^2 & \text{в дефокусирующем секторе}\\ 0 & \text{на втором прямолинейном участке.}\end{array}\right\} \tag{2}$$

В формулах (2) для радиальных колебаний надо положить: $\varkappa_1=\sqrt{1+n_-}$ и $\varkappa_2=\sqrt{n_+-1}$, а для вертикальных колебаний: $\varkappa_1=\sqrt{n_+}$ и $\varkappa_2=\sqrt{n_-}$, где n_+ — положительный показатель магнитного поля, n_- — абсолютное значение отрицательного показателя магнитного поля. R_1 и R_2 — радиусы равновесной орбиты в фокусирующем и дефокусирующем секторах соответственно.

Согласно методу [2] для квадрата модуля функции Флоке (к. м. ф. Ф.) имеет место формула

$$\Phi(\sigma) = A_{12}(\sigma) / \sin \mu, \tag{3}$$

где $A(\sigma)$ — матрица элемента периодичности с началом в точке σ, а величина μ определяется по формуле

$$\cos \mu = \operatorname{Sp} A(\sigma)/2 = \text{const}. \tag{4}$$

Используя технику образования матриц $A(\sigma)$, изложенную в [3, 4], получим:

а) в фокусирующем секторе

$$\left. \begin{array}{r} A(\sigma) = U(\varkappa_1/R_1, \ \sigma) P(l_2) V(\varkappa_2/R_2, \ \Theta_2 R_2) P(l_1) U(\varkappa_1/R_1, \ \Theta_1 R_1 - \sigma) \\ 0 \leqslant \sigma \leqslant \Theta_1 R_1, \end{array} \right\} \tag{5}$$

б) на первом прямолинейном участке

$$\left. \begin{array}{r} A(\sigma) = P(\sigma) U(\varkappa_1/R_1, \ \Theta_1 R_1) P(l_2) V(\varkappa_2/R_2, \ \Theta_2 R_2) P(l_1 - \sigma) \\ 0 \leqslant \sigma \leqslant l_1, \end{array} \right\} \tag{6}$$

в) в дефокусирующем секторе

$$\left. \begin{array}{r} A(\sigma) = V(\varkappa_2/R_2, \ \sigma) P(l_1) U(\varkappa_1/R_1, \ \Theta_1 R_1) P(l_2) V(\varkappa_2/R_2, \ \Theta_2 R_2 - \sigma) \\ 0 \leqslant \sigma \leqslant \Theta_2 R_2, \end{array} \right\} \tag{7}$$

г) на втором прямолинейном участке

$$\left. \begin{array}{r} A(\sigma) = P(\sigma) V(\varkappa_2/R_2, \ \Theta_2 R_2) P(l_1) U(\varkappa_1/R_1, \ \Theta_1 R_1) P(l_2 - \sigma) \\ 0 \leqslant \sigma \leqslant l_2. \end{array} \right\} \tag{8}$$

В формулах (5)—(8) Θ_1 и Θ_2 обозначают угловые растворы фокусирующего и дефокусирующего секторов, l_1 и l_2 — длины первого и второго прямолинейных участков. Кроме того, введены сокращения

$$\left. \begin{array}{l} U(a, x) = \begin{pmatrix} \cos ax & a^{-1} \sin ax \\ -a \sin ax & \cos ax \end{pmatrix} \\[2ex] V(a, x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} ax & a^{-1} \operatorname{sh} ax \\ a \operatorname{sh} ax & \operatorname{ch} ax \end{pmatrix} \\[2ex] P(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right\} \tag{9}$$

Практически можно ограничиться лишь непосредственным вычислением матриц (5) и (6). Матрицы (7) и (8) можно получить с учетом свойств матриц (9) соответственно из матриц (5) и (6) путем простой подстановки: $R_{1,2} \to R_{2,1}$, $l_{1,2} \to l_{2,1}$, $\Theta_{1,2} \to \Theta_{2,1}$ и $\varkappa_{1,2} \to i\varkappa_{2,1}$. Таким образом, имея еще в виду (3), можем к. м. ф. Ф. для системы фодо представить в виде:

а) в фокусирующем секторе

$$\left.\begin{aligned}
&2\varkappa_1\,\Phi(\sigma)\sin\mu/R_1 = [(\varkappa_1 R_2/\varkappa_2 R_1 + \varkappa_2 R_1/\varkappa_1 R_2 +\\
&+\varkappa_1\varkappa_2 l_1 l_2/R_1 R_2)\,\mathrm{sh} + \varkappa_1(l_1+l_2)\,\mathrm{ch}/R_1]\,\tilde{c} +\\
&+\varkappa_2(l_1-l_2)\,\mathrm{sh}\,\tilde{s}/R_2 + [(\varkappa_1 R_2/\varkappa_2 R_1 - \varkappa_2 R_1/\varkappa_1 R_2 +\\
&+\varkappa_1\varkappa_2 l_1 l_2/R_1 R_2)\,\mathrm{sh} + \varkappa_1(l_1+l_2)\,\mathrm{ch}/R_1]\,c +\\
&+[\varkappa_2(l_1+l_2)\,\mathrm{sh}/R_2 + 2\,\mathrm{ch}]\,s,
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

б) на первом прямолинейном участке

$$\left.\begin{aligned}
&\varkappa_1\,\Phi(\sigma)\sin\mu/R_1 = \sigma^2[(\varkappa_1/R_1)^2(\mathrm{ch}+\varkappa_2 l_2\,\mathrm{sh}/R_2)\,s -\\
&-\varkappa_1\varkappa_2\,\mathrm{sh}\,c/R_1R_2] + \sigma\{\varkappa_1\varkappa_2(l_1-l_2)\,\mathrm{sh}\,c/R_1R_2 -\\
&-[\varkappa_1^2(l_1+l_2)\,\mathrm{ch}/R_1^2 + (\varkappa_2/R_2 + \varkappa_1^2 R_2/\varkappa_2 R_1^2 +\\
&+\varkappa_1^2\varkappa_2 l_1 l_2/R_1^2 R_2)\,\mathrm{sh}]\,s\} + (\varkappa_2 l_1\,\mathrm{sh}/R_2 + \mathrm{ch})\,s +\\
&+\varkappa_1[(l_1+l_2)\,\mathrm{ch} + (l_1 l_2\varkappa_2/R_2 + R_2/\varkappa_2)\,\mathrm{sh}]\,c/R_1,
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

в) дефокусирующем секторе

$$\left.\begin{aligned}
&2\varkappa_2\,\Phi(\sigma)\sin\mu/R_2 = [(\varkappa_2 R_1/\varkappa_1 R_2 + \varkappa_1 R_2/\varkappa_2 R_1 -\\
&-\varkappa_1\varkappa_2 l_1 l_2/R_1R_2)\,s + \varkappa_2(l_1+l_2)\,c/R_2]\,\widetilde{\mathrm{ch}} +\\
&+\varkappa_1(l_1-l_2)\,s\,\widetilde{\mathrm{sh}}/R_1 + [(\varkappa_2 R_1/\varkappa_1 R_2 - \varkappa_1 R_2/\varkappa_2 R_1 -\\
&-\varkappa_1\varkappa_2 l_1 l_2/R_1R_2)\,s + \varkappa_2(l_1+l_2)\,c/R_2]\,\mathrm{ch} +\\
&+[2c - \varkappa_1(l_1+l_2)\,s/R_1]\,\mathrm{sh},
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

г) на втором прямолинейном участке

$$\left.\begin{aligned}
&\varkappa_2\,\Phi(\sigma)\sin\mu/R_2 = \sigma^2[\varkappa_1\varkappa_2\,s\,\mathrm{ch}/R_1R_2 -\\
&-\varkappa_2^2(c-\varkappa_1 l_1 s/R_1)\,\mathrm{sh}/R_2^2] + \sigma\{\varkappa_1\varkappa_2(l_1-l_2)\,s\,\mathrm{ch}/R_1R_2 +\\
&+[\varkappa_2^2(l_1+l_2)\,c/R_2^2 + (\varkappa_1/R_1 + \varkappa_2^2 R_1/\varkappa_1 R_2^2 -\\
&-\varkappa_1\varkappa_2^2 l_1 l_2/R_1 R_2^2)\,s]\,\mathrm{sh}\} + (c-\varkappa_1 l_2 s/R_1)\,\mathrm{sh} +\\
&+\varkappa_2[(l_1+l_2)\,c + (R_1/\varkappa_1 - l_1 l_2\varkappa_1/R_1)\,s]\,\mathrm{ch}/R_2.
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

В формулах (10)—(13) введены следующие сокращения:

$$\left.\begin{aligned}
&c \equiv \cos\varkappa_1\Theta_1,\quad s\equiv\sin\varkappa_1\Theta_1,\quad \mathrm{ch}\equiv\mathrm{ch}\,\varkappa_2\Theta_2,\quad \mathrm{sh}\equiv\mathrm{sh}\,\varkappa_2\Theta_2,\\
&\tilde{c}\equiv\cos\varkappa_1\left(\frac{2\sigma}{R_1}-\Theta_1\right),\ \tilde{s}\equiv\sin\varkappa_1\left(\frac{2\sigma}{R_1}-\Theta_1\right),\\
&\widetilde{\mathrm{ch}}\equiv\mathrm{ch}\,\varkappa_2\left(\frac{2\sigma}{R_2}-\Theta_2\right),\ \widetilde{\mathrm{sh}}\equiv\mathrm{sh}\,\varkappa_2\left(\frac{2\sigma}{R_2}-\Theta_2\right).
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Величина μ, входящая в (10)—(13), определяется с учетом (4) по формуле

$$\left.\begin{aligned}\cos\mu = c\,\mathrm{ch} + (\varkappa_2 R_1/\varkappa_1 R_2 + \varkappa_1 R_2/\varkappa_2 R_1 -\\ - \varkappa_1 \varkappa_2 l_1 l_2/R_1 R_2)\, s\,\mathrm{sh}/2 +\\ + \varkappa_2 (l_1 + l_2)\, c\,\mathrm{sh}/2R_2 - \varkappa_1 (l_1 + l_2)\, s\,\mathrm{ch}/2R_1.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

В случае, когда $l_1 = l_2$, $R_1 = R_2$ и $\varkappa_1 = \varkappa_2$, можно, конечно, из наших результатов (10)—(13) получить ранее известные, но выведенные другим способом формулы для к.м.ф.Ф. [1]. Однако отказ от таких ограничений позволяет в некоторых случаях расширить диапазон изменения параметров ускорителя с целью более подходящего размещения аппаратуры инжекции, ускорения и вывода пучка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коломенский А. А., Лебедев А. Н., Теория циклических ускорителей, Физматгиз, 1962.
2. Лембра Ю. Я., ЖТФ, **35**, 574 (1965).
3. Лембра Ю. Я., Изв. АН ЭССР. Серия физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 2, 237 (1965).
4. Лембра Ю. Я., Изв. высш. уч. зав., Физика, № 4, 65 (1966).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
23/I 1967

J. LEMBRA, P. KÕIVA

OSAKESTE TRAJEKTOORI MÄHISJOONE ARVUTAMISEST TUGEVASTI FOKUSEERIVAS KIIRENDAJAS SIRGJOONELISTE SEKTSIOONIDEGA

Maatriksmeetodit [2] on kasutatud osakeste trajektoori mähisjoone arvutamise tehnika lihtsustamiseks tugevasti fokuseerivas kiirendajas sirgjooneliste sektsioonidega. Käesolevas käsitluses ei ole eeldatud tasakaalulise orbiidi raadiuste ja magnetvälja indeksite absoluutväärtuste võrdsust fokuseerivas ja defokuseerivas sektoris ega ka sirgjooneliste sektsioonide pikkuste võrdsust. Tulemused vastavalt fokuseerivale sektorile, esimesele sirgjoonelisele sektsioonile, defokuseerivale sektorile ja teisele sirgjoonelisele sektsioonile on esitatud valemeis (10) — (13).

J. LEMBRA, P. KÕIVA

ON THE CALCULATION OF THE ENVELOPE OF THE TRAJECTORY OF PARTICLES IN THE STRONG FOCUSING ACCELERATOR WITH STRAIGHT SECTIONS

The matrix method (see ref. [2]) is used for simplifying the calculation technique of the envelope of the trajectory of particles in a strong focusing accelerator with straight sections. Equality of equilibrium orbit radii and magnetic field indices in focusing and defocusing sectors and lengths of straight sections is not assumed in this description. Results are given in formulae (10) — (13) for focusing sector, first straight section, defocusing sector and second straight section correspondingly.