EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.2.03

И. КЕЙС

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ГИРОСТАТА В ПОЛЕ СИЛ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА И УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

В работе, продолжающей исследование [1-3], приводятся достаточные условия существования двух интегралов для уравнений движения гиростата, несущего маховики, при действии сил, зависящих от кинетического момента и компонент угловой скорости, а также от трех произвольных функций времени. При совпадении двух первых из них обнаружено обобщение случая интегрируемости В. Вольтерра [1].

Известно, что уравнения вращения вокруг неподвижной точки O гиростата, содержащего маховики, записываются соотношениями

$$dK/dt = [K, \Omega] + L, \tag{1}$$

$$dk/dt = -d\{g\}(\Omega)/dt + M, \tag{2}$$

$$d\alpha/dt = [\alpha, \Omega],\ d\beta/dt = [\beta, \Omega],\ d\gamma/dt = [\gamma, \Omega], \tag{3}$$

в которых векторы L и M определяются моментами приложенных сил, $\{g\}$ — тензор инерции, соответствующий распределению масс маховиков,

$$K = \{G\}(\Omega) + k, \tag{4}$$

а векторы K, Ω, k, α, β, γ и тензор $\{G\}$ имеют принятый в динамике гиростата смысл.

Допустим, что векторы L и M приняты равными выражениям

$$L = \lambda K \| K \|^{-1} + \mu [K, \Omega], \tag{5}$$

$$M = \lambda K \| K \|^{-1} - \nu \{G - g\}(\Omega) \| \{G - g\}^{1/2}(\Omega) \|^{-1}, \tag{6}$$

содержащим три неопределенные функции времени $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$. Используя равенства (4), (5) и (6), нетрудно показать, что уравнения (1) и (2) обладают интегралами

$$\| K \| = \| K_0 \| + \int_{t_0}^{t} \lambda(\xi)\, d\xi, \tag{7}$$

$$\| \{G - g\}^{1/2}(\Omega) \| = \| \{G - g\}^{1/2}(\Omega_0) \| + \int_{t_0}^{t} \nu(\xi)\, d\xi, \tag{8}$$

в записи которых $\|x\|$ определяет функцию $(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$. Можно заметить, что интегралы (7) и (8) не содержат функцию $\mu(t)$, явно зависят от времени и соответствуют выбору внешних сил, для которых момент относительно точки O всего лишь параллелен плоскости, натянутой на векторы K и $[K,\Omega]$ и проходящей через точку O. Для существования интегралов (7) и (8) необходимы очевидные из механики свойства положительной определенности оператора $\{G-g\}$ и его симметрии: $\{G-g\}^T=\{G-g\}$. Нарушение второго свойства не оказывается, впрочем, существенным, поскольку в этом случае будет справедливым иное выражение для интеграла (8). Действительно, если для такого абстрактного случая избрать в качестве M вектор

$$\lambda K\|K\|^{-1}-\delta\|K\|^{-1}\{([(G-g)^{1/2}]^T)^{-1}\}\{G-g\}^{1/2}(\Omega), \tag{9}$$

то система уравнений (1) и (2) позволит определить $\|\omega\|^2$ уравнением $d\ln\|\omega\|^2/dt=2\delta(t)\|K\|^{-1}=2\lambda(t)\,\varrho(\|K\|)\,\|K\|^{-1}$ ($\varrho(u)$ — любая), которое особенно просто интегрируется для частного случая $\varrho(\|K\|)=1$, $(\delta(t)\equiv\lambda(t))$ и дает, согласно выражению (7), следующее значение квадрата нормы вектора $\omega=\{G-g\}^{1/2}(\Omega)$:

$$\|\omega\|^2=\|K\|^2C_0^2, \tag{10}$$

где C_0^2 — некоторая положительная постоянная, соответствующая $\omega(t_0)$. $K(t_0)$. Существенно, что этот случай $(\delta(t)\equiv\lambda(t))$ заменой переменных и времени по формулам

$$\Omega=\|K\|R,\ k=\|K\|l,\ K=\|K\|P,\ \tau=\tau_0+\int_{t_0}^{t}\|K\|dt$$

приводится к случаю В. Вольтерра [1], для которого указаны квадратуры, полностью определяющие движение гиростата (особые подслучаи разработаны в работах С. Эна и Б. А. Смольникова [2, 3]). Действительно, из уравнений (1) и (2), когда векторы L и M определены формулами (5) и (10) следует, что вектор $l+\{g\}(R)$ постоянен в пространстве и равен некоторому вектору m; уравнения (1) и (3), приобретающие вид

$$dP/d\tau=(1+\mu)[P,R], \tag{11}$$

$$d\alpha/d\tau=[\alpha,R],\ d\beta/d\tau=[\beta,R],\ d\gamma/d\tau=[\gamma,R], \tag{12}$$

обладают, согласно (7) и (10), интегралами

$$\|P\|^2=1, \tag{13}$$

$$\|\{G-g\}^{1/2}(R)\|^2=C_0^2. \tag{14}$$

Для вектора P легко получить выражение $\{G-g\}(R)+m$, а вводя новое время σ, равное $\sigma_0+\int_{\tau_0}^{\tau}(1+\mu(\tau))d\tau$, в уравнения (11) составить далее в главных осях систему уравнений, рассмотренную совместно с интегралами (13) и (14) в работе [1], в которой роль A, B, C будут играть соответственно разности G_i-g_i $(i=\overline{1,3})$.

Сопоставляя уравнения (11) и (12) при надлежащем подборе γ_0, а также используя готовые выражения векторов $R(\sigma)$ из работы [2] и принцип суперпозиции, можно убедиться в справедливости формулы $\gamma = P(\tau)\|P(\tau)\|^{-1} = P(\tau)$, которая исчерпывает вопрос интеграции системы (11) и (12). Действительно, для углов Эйлера имеем формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = [(G_1 - g_1)R_1(\tau) + m_1][(G_2 - g_2)R_2(\tau) + m_2]^{-1},$$

$$\cos\Theta = (G_3 - g_3)R_3(\tau) + m_3,$$

$$d\psi/d\tau = \{[(G_1 - g_1)R_1(\tau) + m_1]R_1(\sigma(\tau)) + [(G_2 - g_2)R_2(\tau) + m_2]R_2(\sigma(\tau))\}$$

$$\{[(G_1 - g_1)R_1(\tau) + m_1]^2 + [(G_2 - g_2)R_2(\tau) + m_2]^2\}^{-1}, \qquad (15)$$

где

$$\tau = \tau_0 + \int_{t_0}^{t} \{\|K_0\| + \int_{t_0}^{\xi} \lambda(\eta)\,d\eta\}\,d\xi.$$

Если $\mu = 0$, то все отличие рассматриваемой картины движения сведется к иной зависимости углов Эйлера от «старого» времени при полном сохранении геометрии траекторий относительно случая [1], между тем как при $\mu \neq 0$ ясно, что $\sigma(\tau) \neq \tau$ и поле скоростей апекса с течением времени деформируется вдоль параллели, индуцируя многообразие, качественно отличное от множества траекторий Вольтерра.

Обсуждение. Два интеграла (7) и (8) получены в поле сил, зависящем от относительных и абсолютных угловых скоростей гиростата при трех произвольно выбранных функциях времени в коэффициентах. Это обстоятельство в принципе позволяет понизить порядок системы уравнений (1) и (2) на две единицы — с 6 до 4. Используя свободу выбора этих функций, можно понизить порядок последней еще на три единицы, определив момент M выражением $\lambda\|K\|^{-1}(k + \{g\}(\Omega))$, вообще отличным от нуля, что приведет нас к полностью интегрируемой системе типа Вольтерра. Далее, функция $\mu(t)$ не является препятствием для получения конечных результатов, представляющих обобщение случая В. Вольтерра [1].

Другие возможности, связанные с иным выбором $\varrho(\|K\|)$, не исчерпываются этим случаем, имеющем непосредственное отношение к задаче быстродействия гиростата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra Vito. Acta math., **22**, 201—368 (1898—1899).
2. Ena Silvio. Atti della R. Acad. dei Lincei, 8, 534—570 (1908).
3. Смольников Б. А. ПММ, т. 30, в. 4, 625—635 (1966).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
13/XII 1967

I. KEIS

GÜROSTAADI INTEGRAALIDEST KINEETILISEST MOMENDIST JA NURKKIIRUSEST SÕLTUVAS JÕUVÄLJAS

Artiklis antakse piisavad tingimused kolmest suvalisest ajafunktsioonist sõltuvate jõudude mõju all oleva gürostaadi liikumisvõrrandite eksisteerimiseks. Näidatakse, et Volterra integreerimisjuhu üldistus on võimalik sel juhul, kui kaks esimest ajafunktsiooni on sarnased.

I. KEIS

TWO INTEGRALS OF GYROSTAT, TUMBLING WITHIN THE TORQUES WHICH DEPEND ON THE KINETICAL MOMENT AND ANGULAR VELOCITY

The author of this paper presents sufficient conditions for the existence of two integrals corresponding to the gyrostat carrying wheels and subjected to torques depending on the kinetical moment and the angular velocity, including three independent functions. A coincidence of the two above-mentioned conditions leads to a generalization of Volterra's case of integration.