EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.2.02

*В. УНТ*

# О СТРУКТУРЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

В настоящей статье применяется «метод быстрых приближений» в координатах Бонди. Делается предположение, что компоненты метрического тензора разложимы в ряд по степеням $\frac{1}{r}$. Показывается, как всю тяжесть проблемы интегрирования системы уравнений Эйнштейна можно свести к интегрированию одного уравнения. Рассматриваются условия сходимости. Разработанная теория применяется к исследованию переноса массы квадрупольным гравитационным излучением. В отличие от других авторов, получается результат, где унесенная гравитационными волнами масса оказывается настоящей массой, а не зависящим от полярных углов аспектом массы. При получении последнего результата важную роль играют условия сходимости решения.

## 1. Введение

До настоящего времени в общей теории относительности не удавалось удовлетворительно применять метод последовательных приближений (метод «быстрых приближений») в том случае, когда имеется гравитационное излучение. Целью настоящей статьи является получение на основе работы [1] формул, позволяющих применять метод «быстрых приближений» и при наличии гравитационного излучения. Мы найдем также условия, гарантирующие сходимость решений.

С другой стороны, в работах, в которых при интегрировании уравнений Эйнштейна применяется метод Бонди, оставался также ряд неясных моментов. Укажем на два из них. Во-первых, решение уравнений Эйнштейна определяется функцией информации. Но как ее выбрать? Во-вторых, почему масса, унесенная гравитационными волнами, описывается в решениях уравнений Эйнштейна величиной (аспектом массы), зависящей от полярных углов? Ниже предлагается ответ и на эти вопросы. Мы получим уравнение, из которого вытекают условия, которым должна удовлетворять функция информации, и покажем, что соблюдение условий сходимости решений уравнений Эйнштейна гарантирует получение настоящей массы вместо аспекта массы.

В данной работе линейный элемент пространства-времени взят в таком же виде, как у Бонди и др. [1]:

$$ds^2 = (Vr^{-1} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma}) du^2 + 2e^{2\beta} du\, dr + 2Ur^2 e^{2\gamma} du\, d\vartheta - r^2 (e^{2\gamma} d\vartheta^2 + e^{-2\gamma} \sin^2 \vartheta\, d\varphi^2). \tag{1}$$

Кроме того, сделаны следующие предположения:

1. Все компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ можно представить в виде ряда $g_{\mu\nu} = \sum\limits_s \underset{s}{g}_{\mu\nu}$, где $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$ галилеевы значения $g_{\mu\nu}$;

$$O(\underset{k+s}{g}_{\mu\nu}) = O(\underset{k}{g}_{\mu\nu} \cdot \underset{s}{g}_{\mu\nu}); \; O(\underset{s}{g}_{\mu\nu,\alpha}) = O(\underset{s}{g}_{\mu\nu}); \; \underset{s+1}{g}_{\mu\nu} \ll \underset{s}{g}_{\mu\nu}.$$

Здесь $O$ означает порядок величины соответствующего члена и индекс $\alpha$ после запятой — дифференцирование по любой координате $x^\alpha$.

2. Встречающиеся в данной работе функции $F(u, r, \vartheta)$ разложимы в ряд по степеням $\frac{1}{r}$. Обозначим коэффициенты разложения через ${}^{(s)}F$:

$$F(r, u, \vartheta) = \sum_s \frac{{}^{(s)}F}{r^s}.$$

3. Метрика на бесконечности переходит в галилееву.

Во втором пункте данной работы приведем уравнения Эйнштейна, соответствующие линейному элементу (1), и проанализируем их структуру. Решение этих уравнений определяется практически только величиной ${}^{(1)}\gamma$. В третьем пункте укажем общую схему, по которой можно найти уравнения, в которых будут содержаться только ${}^{(s)}\gamma$. В четвертом пункте выведем эти уравнения в явном виде для случая последовательных приближений, а в пятом пункте займемся их интегрированием. При этом особое внимание обратим на условия сходимости. Мы потребуем, чтобы $g_{\mu\nu}$ оставались конечными при $u \to \infty$. В шестом пункте покажем, что условия сходимости являются достаточными для того, чтобы в решении уравнений Эйнштейна получить вместо аспекта массы обычную массу.

Мы ввели в ходе изложения и введем еще некоторые обозначения, которые здесь резюмируем.

Обозначения

Пусть $F = F(u, r, \vartheta)$ любая встречающаяся в данной работе функция. Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial u}, \quad F' = \frac{\partial F}{\partial \vartheta}, \quad F_{,1} = \frac{\partial F}{\partial r}.$$

${}^{(s)}F(u, \vartheta)$ — коэффициент при $r^{-s}$ в разложении $F(r, u, \vartheta)$ по степеням $\frac{1}{r}$.

$a_s \overset{\text{опр}}{=} {}^{(s)}\gamma, \quad c \overset{\text{опр}}{=} a_1.$

$\langle s, \mu\nu \rangle$ — нелинейная часть ${}^{(s)}R_{\mu\nu}$.

$\underset{s}{F}$ — члены порядка $s$ в $F$; $F = \sum\limits_s \underset{s}{F}$.

Начиная с четвертого пункта будем обозначать через $F$ только $\underset{n+1}{F}$.

$F \overset{\text{опр}}{=} \underset{n+1}{F}.$

## 2. О структуре уравнений Эйнштейна в координатах Бонди

В случае линейного элемента (1), уравнения Эйнштейна для вакуума имеют вид ($R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи)

$$0 = R_{11} = -4(\beta_{,1} - \tfrac{1}{2} r \gamma_{,1}^2) r^{-1}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 0 = -2r^2 R_{12} = {} & (r^4 e^{2(\gamma-\beta)} U_{,1})_{,1} - \\ & - 2r^2(\beta'_{,1} - \gamma'_{,1} + 2\gamma_{,1}\gamma' - 2\beta' r^{-1} - 2\gamma_{,1}\cot\vartheta), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 0 = R_{22} e^{2(\beta-\gamma)} - r^2 R_3^3 e^{2\beta} = {} & 2V_{,1} + \tfrac{1}{2} r^4 e^{2(\gamma-\beta)} U_{,1}^2 - \\ & - r^2 U'_{,1} - 4rU' - r^2 U_{,1}\cot\vartheta - 4rU\cot\vartheta + \\ & + 2e^{2(\beta-\gamma)}[-1 - (3\gamma' - \beta')\cot\vartheta - \gamma'' + \beta'' + \\ & + \beta'^2 + 2\gamma'(\gamma' - \beta')], \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 0 = -R_3^3 e^{2\beta} r^2 = {} & 2r(r\dot{\gamma})_{,1} + (1 - r\gamma_{,1}) V_{,1} - \\ & - (r\gamma_{,11} + \gamma_{,1}) V - r(1 - r\gamma_{,1}) U' - r^2(\cot\vartheta - \gamma') U_{,1} + \\ & + r(2r\gamma'_{,1} + 2\gamma' + r\gamma_{,1}\cot\vartheta - 3\cot\vartheta) U + \\ & + e^{2(\beta-\gamma)}[-1 - (3\gamma' - 2\beta')\cot\vartheta - \\ & - \gamma'' + 2\gamma'(\gamma' - \beta')]. \end{aligned} \tag{5}$$

Чтобы больше подчеркнуть структуру этих уравнений, приведем еще их символическую запись (см. [2])

$$\beta_{,1} = \tfrac{1}{2} r \gamma_{,1}^2, \tag{2a}$$

$$[r^4 e^{2(\gamma-\beta)} U_{,1}]_{,1} = \{\beta, \gamma, 1, 2\}, \tag{3a}$$

$$V_{,1} = \{U, \beta, \gamma, 1, 2\}, \tag{4a}$$

$$(r\dot{\gamma})_{,1} = \{V, U, \beta, \gamma, 1, 2\}. \tag{5a}$$

Здесь скобки { } обозначают сложную функцию переменных, приведенных в скобках, и их производных по $r$ и $\vartheta$.

Если уравнения (2)—(5) удовлетворены, то уравнения $R_{01} = 0$, $R_{02} = 0$ и $R_{00} = 0$ удовлетворяются вследствие тождеств Бианки автоматически, за исключением коэффициентов разложения при $\frac{1}{r^2}$ в $R_{00} = 0$ и $R_{02} = 0$. Поэтому нужно дополнительно к (2)—(5) учитывать еще уравнения

$${}^{(2)}R_{00} = 0, \tag{6}$$

$${}^{(2)}R_{02} = 0. \tag{7}$$

Проанализируем структуру уравнений (2)—(7). Интеграл уравнений (2)—(4) определяется величиной $\gamma$ с точностью до четырех произвольных функции от $u$ и $\vartheta$, которые вводятся при интегрировании. Действительно, зная $\gamma$, можно из уравнения (2) найти $\beta$; зная $\gamma$ и $\beta$, можем из уравнения (3) найти $U$; зная $\gamma$, $\beta$ и $U$, можем из уравнения (4) найти $V$. Из четырех произвольных функции интегрирования одну можно исключить без ограничения общности преобразованием координат, другую нужно положить равной нулю, если не хотим получить расходящейся величины при $r \to \infty$. Остаются две функции: $N(u, \vartheta)$ и $M(u, \vartheta)$; $-6N(u, \vartheta)$ прибавляется к $r^4 e^{2(\gamma-\beta)} U_{,1}$ и $-2M(u, \vartheta)$ — к $V$. При учете уравнений (6) и (7) $M$ и $N$ окажутся уже не произвольными, а должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\dot{M} = -\dot{c}^2 + \tfrac{1}{2}(\dot{c}'' + 3\dot{c}' \cot\vartheta - 2\dot{c}), \tag{6a}$$

$$-3\dot{N} = M' + 3c\dot{c}' + 4c\dot{c}\cot\vartheta + \dot{c}c'. \tag{7a}$$

Для определения решения системы (2)—(7) не нужно знать всю $\gamma$, а достаточно знать $a_1$. Вследствие этой особой роли $a_1$ она получила название функции информации и обозначается обычно через $c$. Задав $a_1$, можно с помощью уравнений (2)—(7) найти остальные $a_k$. Действительно,* зная $a_s (s \leqslant k)$ и соответствующие коэффициенты разложения в $\beta$, $U$ и $V$, можем вставить их в уравнение (5) и найти таким образом $\dot{a}_{k+1}$ и $a_{k+1}$, что в свою очередь позволяет вычислить следующий коэффициент в разложении $\beta$, $U$ и $V$. Затем можем повторить весь цикл снова, найти $a_{k+2}$ и т. д. Подобную схему интегрирования уравнений (2)—(7) предложили Бонди и др. [1]. Но при этом возникают трудности, связанные с выбором подходящего $a_1$. Как мы увидим в дальнейшем, для того чтобы получить нерасходящееся решение уравнений Эйнштейна, $a_1$ должен удовлетворять специальным условиям, которые вытекают из уравнений ${}^{(s)}R_{\mu\nu} = 0$. При схеме интегрирования, предложенной Бонди, эти условия учитывать очень трудно, практически они не были учтены. Поэтому мы преобразуем схему интегрирования уравнений Эйнштейна, которую дал Бонди, таким образом, чтобы сначала определить все $a_s$, удовлетворяющие условиям сходимости, а затем уже приступить к определению остальных компонент метрического тензора.

## 3. Общая схема вывода уравнения для ${}^{(s)}\gamma$

Прежде чем приступить к конкретным вычислениям, укажем общую схему, по которой найдем новое уравнение. Берем $\gamma$ в виде

$$\gamma(u, \vartheta, r) = \sum \frac{a_s(u, \vartheta)}{r^s}, \tag{8}$$

где коэффициенты $a_s(u, \vartheta)$ пока не определенные. Будем искать остальные $g_{\mu\nu}$ также в виде

$$g_{\mu\nu}(u, r, \vartheta) = \sum_s \frac{{}^{(s)}g_{\mu\nu}(u, \vartheta)}{r^s}.$$

* Точнее, наш ряд обрывается при $k=2$, так как $a_2 = 0$. Но тогда математически ту же самую роль, что $a_k$ сыграют $M$ и $N$.

Интегрирование уравнения (2) дает

$$ {}^{(s)}\beta = {}^{(s)}\beta\,[a_k(u, \vartheta)]. $$

Затем получаем из уравнения (3)

$$ {}^{(s)}U = {}^{(s)}\overline{U}[{}^{(r)}\beta, a_k, N, \vartheta, 2] = {}^{(s)}U[a_k, N, \dot{\vartheta}, 2]. $$

Цифрой 2 в скобках обозначаем, что $U$ зависит не только от $a_k$, но и от производных $a_k$ по $\vartheta$. Далее найдем из уравнения (4)

$$ {}^{(s)}V = {}^{(s)}\overline{V}[{}^{(n)}U, {}^{(m)}\beta, a_k, N, M, 2] = {}^{(s)}V[a_k, N, M, 2]. $$

Подставляя найденные ${}^{(s)}\beta$, ${}^{(s)}U$ и ${}^{(s)}V$ в (5), получаем уравнение типа

$$ \dot{a}_{s+1} = F(a_k, M, N, 2), \tag{9} $$

где $k \leqslant s$. На $a_n$ наложим дополнительные условия, чтобы при $u \to \infty$ они оставались конечными.

Интегрирование системы уравнений Эйнштейна сводится фактически к интегрированию уравнений (9). После этого нахождение остальных компонент метрического тензора не представит трудности. Но сами уравнения (9) будут настолько сложными, что при их интегрировании придется пользоваться приближенными методами. Поэтому введем с самого начала метод последовательных приближений, будем искать $a_s$ в виде $a_s = \sum\limits_k \underset{k}{a_s}$ и выведем из уравнений (9) соотношения для определения $\underset{n+1}{a_s}$, когда $\underset{k}{a_s}$ и, следовательно, $\underset{k}{\beta}$, $\underset{k}{U}$ и $\underset{k}{V}$ при $k \leqslant n$ известны.

Далее будем рассматривать в уравнениях Эйнштейна только члены порядка $n+1$. Это позволит ввести следующее соглашение. Начиная со следующего пункта индекс $n+1$ под буквой будем не писать, а подразумевать, т. е. всегда, когда под $U$, $V$, $R_{\mu\nu}$ и $< s, \mu\nu >$ индекс отсутствует, будем подразумевать, что порядок величины соответствующих членов $n+1$. Здесь мы обозначали через $< s, \mu\nu >$ нелинейную часть ${}^{(s)}R_{\mu\nu}$. Отметим, что $\underset{n+1}{< s, \mu\nu >}$ будут содержать только известные из предыдущих приближений $\underset{k}{g_{\mu\nu}}$.

## 4. Вывод уравнения для ${}^{(s)}\gamma$

Выпишем из уравнений (2)—(4) члены порядка величины $n+1$ и найдем соответствующие интегралы. Во всех них, кроме $\beta$, будут содержаться не известные сначала $a_k$. Уравнение (2) дает

$$ -\frac{4\beta_{,1}}{r} + \sum_s \frac{< s, 11 >}{r^s} = 0, \tag{2б} $$

откуда

$$ \beta = -\sum_s \frac{< s+2, 11 >}{4s\,r^s}. \tag{10} $$

Из уравнения (3) получаем

$$ [r^4 U_{,1}]_{,1} - 2r^2 \sum_s \left( \frac{{}^{(s)}Q_1}{r^s} + \frac{sA_s}{r^{s+1}} \right) = 0. \tag{3б} $$

Здесь введены обозначения

$$A_s \overset{\text{опр}}{=} a'_s + 2\cot\vartheta\, a_s, \tag{11}$$

$$^{(s)}Q_1 \overset{\text{опр}}{=} \langle s, 12\rangle + \frac{(s+1)}{4(s-1)}\langle s+1, 11\rangle'. \tag{12}$$

Интеграл уравнения (3б) следующий:

$$U = \frac{2N(u,\vartheta)}{r^3} + \sum_s \frac{2\left[{}^{(s)}Q_1 + (s-1)A_{s-1}\right]}{s(s-3)r^s}. \tag{13}$$

Подставляя выражения (8), (10) и (13) в уравнение (4), получаем

$$2V_{,1} - \frac{2(N' + N\cot\vartheta)}{r^2} + \sum_s\left[\frac{^{(s)}Q_2}{r^s} + \frac{2(s-1)(s-4)}{s(s-3)}\,\frac{B_{s-1}}{r^{s-1}} - \frac{2B_s}{r^s}\right] = 0. \tag{4б}$$

Здесь

$$B_s \overset{\text{опр}}{=} A'_s + \cot\vartheta\, A_s, \tag{14}$$

или, учитывая соотношение (11),

$$B_s = a''_s + 3\cot\vartheta\, a'_s - 2a_s. \tag{15}$$

$$^{(s)}Q_2 = \langle s, 22\rangle + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\langle s, 33\rangle + \frac{2(s-3)}{(s-2)(s+1)}\left[{}^{(s+1)}Q'_1 + \right.$$

$$\left. + \cot\vartheta\, {}^{(s+1)}Q_1\right] - \frac{1}{2s}\left(\langle s+2, 11\rangle'' + \cot\vartheta\langle s+2, 11\rangle' - \right.$$

$$\left. - 2\langle s+2, 11\rangle\right).$$

Подставляя в последнее выражение вместо $^{(s)}Q_1$ его значение (12), получаем

$$^{(s)}Q_2 = \langle s, 22\rangle + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\langle s, 33\rangle +$$

$$+ \frac{2(s-3)}{(s-2)(s+1)}\left[\langle s+1, 12\rangle' + \cot\vartheta\langle s+1, 12\rangle\right] + \frac{1}{s}\langle s+2, 11\rangle -$$

$$- \frac{2}{s(s-2)(s+1)}\left[\langle s+2, 11\rangle'' + \cot\vartheta\langle s+2, 11\rangle'\right]. \tag{16}$$

Интеграл уравнения (4б) имеет вид

$$V = -2M(u,\vartheta) - \frac{N' + \cot\vartheta\, N}{r} +$$

$$+ \sum_{s(s>0)} \frac{1}{r^s}\left(\frac{^{(s+1)}Q_2}{2s} - \frac{2B_{s+1}}{(s-1)(s+2)}\right). \tag{17}$$

В выражения для $U$ и $V$ входят, кроме известных $^{(s)}Q_1$ и $^{(s)}Q_2$, еще неизвестные $a_s$ и их производные по $\vartheta$. Далее найдем рекуррентные* формулы для $a_k$. Вставляя выражения для $\beta$, $U$ и $V$ в уравнение (5), получаем $(\underset{0}{V} = r)$

* Эти формулы можно назвать рекуррентными только условно, так как $\dot a_{k+1}$ будет определяться не только величиной $a_k$, но и $^{(k)}Q$.

$$\frac{N\cot\vartheta - N'}{r^2} + \sum_s \Big\{ -\frac{2(s-1)\dot{a}_s}{r^{s-1}} + \frac{{}^{(s)}Q}{r^s} + \frac{2s\,B_{s+1}}{(s-1)(s+2)\,r^{s+1}} -$$

$$-\frac{s(s-1)a_s}{r^s} - \frac{2(s-1)}{s(s-3)\,r^{s-1}}\,[A'_{s-1} - (s-3)\cot\vartheta\,A_{s-1}] - \frac{B_s}{r^s}\Big\} = 0. \tag{18}$$

Здесь

$${}^{(s)}Q = \frac{1}{\sin^2\vartheta} < s, 33 > - \tfrac{1}{2}\,{}^{(s)}Q_2 +$$

$$+ \frac{2}{(s+1)(s-2)}\,[-{}^{(s+1)}Q'_1 + (s-2)\cot\vartheta\,{}^{(s+1)}Q_1] +$$

$$+ \frac{< s+2, 11 >}{2s} - \frac{\cot\vartheta < s+2, 11 >'}{2s},$$

или, учитывая соотношения (12) и (16), имеем

$${}^{(s)}Q = \frac{1}{2(s+1)(s-2)}\,(- < s+2, 11 >'' + \cot\vartheta < s+2, 11 >') +$$

$$+ \frac{(s-1)}{(s+1)(s-2)}\,(- < s+1, 12 >' + \cot\vartheta < s+1, 12 >) +$$

$$+ \frac{1}{2\sin^2\vartheta} < s, 33 > - \tfrac{1}{2} < s, 22 >. \tag{19}$$

Приравнивая в (18) коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{1}{r}$ и учитывая соотношения (11), (14) и (15), получаем

$$2s\dot{a}_{s+1} = -\frac{(s-1)s}{(s-2)(s+1)}\Big\{a''_s + \cot\vartheta\,a'_s +$$

$$+ \Big[s(s-1) - \frac{4}{\sin^2\vartheta}\Big]\,a_s\Big\} + (N\cot\vartheta - N')\,\delta_{s2} + {}^{(s)}Q \tag{20}$$

Введем оператор $D_s$, определенный соотношением

$$D_s\,a_k \overset{\text{опр}}{=} a''_k + \cot\vartheta\,a'_k + \Big[s(s+1) - \frac{4}{\sin^2\vartheta}\Big]\,a_k. \tag{21}$$

Теперь можем переписать уравнение (20) в виде

$$2s\dot{a}_{s+1} = -\frac{s(s-1)}{(s-2)(s+1)}\,D_{s-1}\,a_s + (N\cot\vartheta - N')\,\delta_{s2} + {}^{(s)}Q. \tag{22}$$

## 5. Интегрирование уравнения (22)

Задача нахождения конечного интеграла уравнений (2)—(7) сводится к нахождению такого $\gamma$, который сам является конечным и при интегрировании уравнений (2)—(4) не порождает, во-первых, членов, содержащих $\ln r$ и, во-вторых, членов, имеющих сингулярность в окрестности полярной оси $\vartheta = 0$. Первое из этих условий выполняется, если

$${}^{(2)}\gamma = 0. \tag{23}$$

Второе условие соблюдается, если зависимость $\gamma$ от $\vartheta$ можно представить в виде

$$ {}^{(s)}\gamma = \sin^2\vartheta\, f_s(u, \vartheta), \tag{24} $$

где $f_s(u, \vartheta)$ — ограниченные на шаре функции. Условия (24) получаются из уравнения (4), где в $V_{,1}$ входят члены типа $\cot\vartheta\,\gamma'$, которые должны оставаться в окрестности полярной оси конечными. Из-за условия (23) ряд рекуррентных формул для $a_s$ как будто обрывается при $s = 2$. Но как увидим ниже, условия (6а) и (7а) и входящие в них величины $M$ и $N$ помогают заполнить этот пробел. Теперь вся наша задача сводится к нахождению конечных решений уравнений (22), (6а) и (7а), удовлетворяющих дополнительным условиям (23) и (24).

Так как имеет место соотношение

$$ -D_s P_n^{(2)}(\cos\vartheta) = (n-s)(n+s+1) P_n^{(2)}(\cos\vartheta), \tag{25} $$

в котором $P_n^{(2)}$ — присоединенные полиномы Лежандра второго рода, то естественным базисом разложения для $a_s$ являются $P_n^{(2)}$. Будем искать $a_s$ в виде

$$ a_s = \sum_k \alpha_{sk}(u) P_k^{(2)}(\cos\vartheta). \tag{26} $$

Отметим, что $P_n^{(2)}$ удовлетворяют и условию (24). Разложим ${}^{(s)}Q$ также в ряд по $P_n^{(2)}$ $(s \geqslant 2)$:

$$ {}^{(s)}Q = \sum_k q_{sk} P_k^{(2)}. \tag{27} $$

Учитывая соотношение (25), получаем из уравнения (22) рекуррентные формулы для $\alpha_{sk}(u)$ $(s \geqslant 3)$:

$$ \dot{\alpha}_{s+1,\,k} = \frac{(s-1)(k-s+1)(k+s)}{2(s-2)(s+1)}\alpha_{sk} + \frac{1}{2s} q_{sk}. \tag{28} $$

Продолжим ряд рекуррентных формул вплоть до $\alpha_{1k}$, пользуясь соотношениями (6а) и (7а). Будем искать $N$ и $M$ в виде

$$ N = \sum_k \nu_k(u) P_k^{(1)}(\cos\vartheta), \tag{29} $$

$$ M = \sum_k \mu_k(u)\, P_k(\cos\vartheta). \tag{30} $$

Нелинейный член в (6а) разложим по полиномам Лежандра, а в (7а) — по присоединенным полиномам Лежандра первого рода:

$$ \dot{c}^2 = \sum_k q_{0k} P_k(\cos\vartheta), \tag{31} $$

$$ (3c\dot{c}' + 4c\dot{c}\cot\vartheta + \dot{c}c') = \sum_k q_{1k} P_k^{(1)}(\cos\vartheta). \tag{32} $$

Подставляя (29)—(32) и (26) в уравнения (20), (6а) и (7а), получаем

$$ 4\dot{\alpha}_{3k} = -\nu_k + q_{2k}(u), \tag{33} $$

$$ -3\dot{\nu}_k = \mu_k + q_{1k}(u), \tag{34} $$

$$\dot{\mu}_k = -q_{0k}(u) + \tfrac{1}{2}\frac{(k+2)!}{(k-2)!}\dot{\alpha}_{1k}. \tag{35}$$

Здесь мы воспользовались следующими соотношениями:

$$P_n^{(1)}\cot\vartheta - P_n^{(1)'} = -P_n^{(2)}, \tag{36}$$

$$P_n' = P_n^{(1)}, \tag{37}$$

$$P_n^{(2)''} + 3\cot\vartheta\, P_n^{(2)'} - 2P_n^{(2)} = \frac{(n+2)!}{(n-2)!}P_n. \tag{38}$$

В уравнениях (28), (33)—(35) $q_{sk}$ — заданные величины. Они определены приближенными решениями более низкого порядка. Эти величины совместно с $\alpha_{1k}$ определяют $\mu_k$, $\nu_k$ и $\alpha_{sk}$ при $s \geqslant 3$.

Учитывая, что базисами разложения у нас являются $P_k^{(2)}, P_k^{(1)}$ или $P_k$, нетрудно убедиться, что индекс $k$ принимает следующие значения: в уравнении (35) начиная с нуля (за исключением $\alpha_{1k}$), в уравнении (34) начиная с единицы, в уравнении (33) начиная с двух. Это значит, что выбором $\alpha_{1k}$ нельзя повлиять только на $\mu_0$, $\mu_1$ и $\nu_1$, остальные $\mu_k$, $\nu_k$ и $\alpha_{sk}(k+1 \geqslant s \geqslant 3)$ зависят от выбора $\alpha_{1k}$. Поэтому при выборе $\alpha_{1k}$ мы можем и должны руководствоваться соображениями сходимости $\nu_k$ и $\alpha_{sk}$ при $u \to \infty$.

Рассмотрим структуру $\alpha_{sk}$. Можем написать (все сказанное о $\alpha_{sk}$ будет относиться и к $\nu_k$):

$$\alpha_{sk}(u) = \bar{\alpha}_{sk}(u) + \bar{\bar{\alpha}}_{sk}(u),$$

где $\bar{\bar{\alpha}}_{sk}$ определяются в конечном счете величиной $\alpha_{1k}$, а $\bar{\alpha}_{sk}$ — величинами $q_{rk}$, где $r < s$. При этом могут возникнуть расходимости следующего типа. Если некоторое $q_{sk} \geqslant 0$ (или $q_{sk} \leqslant 0$) и $q_{sk}(u) \not\equiv 0$, то может случиться, что $\alpha_{s+l,\,k} \to \infty$ $(l = 2, 3, \ldots)$ при $u \to \infty$. В таких случаях, в $\alpha_{1k}$ должен с самого начала содержаться член, обрывающий ряд, порожденный величиной $q_{sk}$. Это и является одним из самых существенных условий, которое нужно учитывать при выборе $a_1$.

Из уравнения (28) следует, что влияние $\alpha_{1k}$ распространяется только до члена $\alpha_{k+1,\,k}$, так как перед $\alpha_{sk}$ стоит множитель $k-s+1$. Если $q_{sk}$ порождают расходимости в $\alpha_{sk}$, где $s > k+1$, то придется, по-видимому, отказаться от координатной системы, определенной линейным элементом (1). Нетрудно убедиться, что если вместо $r$ ввести в (2)—(7) новую независимую переменную $\varrho$, $\varrho = r + \underset{1}{R} + \ldots$, то все уравнения, полученные в настоящей работе, сохранят свой вид, может меняться только численное значение коэффициентов $q_{sk}$, где $s \geqslant 2$. Этим произволом и можно воспользоваться для устранения расходимостей, если таковые возникнут.

В данной работе было сделано еще предположение о разложимости встречающихся функций в ряд по степеням $\frac{1}{r}$. По-видимому, это не является слишком строгим ограничением. Действительно, если $\underset{m}{g}_{\mu\nu}$ $(m \leqslant n)$ можно разложить в ряд по степеням $\frac{1}{r}$, то из вышеприведенных формул вытекает, что и $\underset{n+1}{g}_{\mu\nu}$ можно получить в виде такого же ряда.

В линейном же приближении можно получить далеко от источников конечных размеров решения для $\underset{1}{g}_{\mu\nu}$ в виде ряда по степеням $\frac{1}{r}$.

Далее проиллюстрируем применение разработанной выше общей теории на примере определения массы, унесенной гравитационным квадрупольным излучением. Оставляя детальное рассмотрение этой проблемы на другой раз, остановимся на ней очень бегло, скорее для иллюстрации основных идей метода, нежели в целях подробного физического анализа проблемы.

## 6. О переносе массы квадрупольным гравитационным излучением

Самым простым нетривиальным решением уравнений (2)—(7) является решение Шварцшильда

$$M = m, \text{ где } m = \text{const}; \; V = r - 2m, \quad N = \gamma = U = 0.$$

Решение Шварцшильда можно получить и из уравнений (28), (33)—(35), если взять

$$\underset{1}{\mu}_0 = m, \; \underset{1}{\mu}_k = 0 \qquad \text{при} \qquad k > 0;$$

$$\underset{1}{\nu}_k = \underset{1}{\alpha}_{sk} = 0; \qquad \underset{r}{\mu}_k = \underset{r}{\nu}_k = \underset{r}{\alpha}_{sk} \qquad \text{при} \qquad r > 1.$$

Приведенные здесь значения коэффициентов Фурье определяют не приближенное, а точное решение уравнений Эйнштейна. В данном случае в нашем решении имеется только центральносимметрическая компонента

$$M = \mu_0 P_0.$$

Из решения Шварцшильда получаем интерпретацию $\mu_0$ как массы центрального тела. Далее займемся проблемой уноса массы гравитационными волнами.

Известно, что не существует ни чисто центральносимметрических, ни дипольных гравитационных волн. Поэтому, как простейший пример гравитационного излучения, рассмотрим чистое квадрупольное излучение, его влияние на массу центрального тела. Пусть у нас в первом приближении имеется квадрупольное излучение

$$\underset{1}{c} = \ddot{Q}(u) P_2^{(2)} (\cos \vartheta),$$

где $Q(u)$ — умноженный на постоянную квадрупольный момент. Рассмотрим теперь уравнения (6a) и (7a) во втором приближении:

$$\dot{M}(u, \vartheta) = -9\dddot{Q}^2 \sin^4 \vartheta + \tfrac{1}{2}(\underset{2}{\dot{c}}'' + 3\cot \vartheta \, \underset{2}{\dot{c}}' - 2\underset{2}{\dot{c}}), \tag{6б}$$

$$-3\dot{N}(u, \vartheta) = M' + 3\underset{1}{c}\,\underset{1}{\dot{c}}' + 4\cot \vartheta \, \underset{1}{c}\,\underset{1}{\dot{c}} + \underset{1}{\dot{c}}\,\underset{1}{c}'. \tag{7б}$$

Если не принимать во внимание то обстоятельство, что при выборе

$c(\equiv a_1)$ мы ограничены условиями сходимости, можно было бы положить $\underset{2}{c} = 0$, и из (6б) следовало бы

$$M(u, \vartheta) = m_0 - 9\sin^4\vartheta \int_{u_0}^{u} [\overset{\dots}{Q}(\bar{u})]^2 \, d\bar{u}, \tag{39}$$

где $m_0$ — постоянная, которая равняется начальной массе. Вследствие гравитационного излучения $M$ убывает монотонно, но оказывается зависящим от полярных углов. Бонди назвал $M$ аспектом массы и определил массу как аспект массы, усредненный по сфере

$$m(u) = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} M(u, \vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta. \tag{40}$$

Но неясным оставался вопрос, почему в линейном элементе унесенная гравитационными волнами масса описывается аспектом массы, зависящим от полярных углов. Отметим, что физически неудовлетворительный результат ведет и к математически неудовлетворительному результату. Вставляя (39) в (7б), получим, что при $u \to \infty$ $N \to \infty$. Чтобы избежать этих расходимостей, мы должны выбрать $\underset{2}{c}$ специальным образом. При этом физически очень существенно, что выбор $\underset{2}{c}$ не может повлиять в выражении (40) на величину $m(u)$. Действительно,

$$\int_0^{\pi} (c'' + 3\cot\vartheta \, c' - 2c) \sin\vartheta \, d\vartheta = (c' \sin\vartheta + 2c\cos\vartheta)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Здесь учтено условие (24).

Выберем $\underset{2}{c}$ таким образом, чтобы $N$ оставался при $u \to \infty$ конечным. Займемся рассмотрением уравнений (34) и (35). Определим $q_{0k}$:

$$\underset{1}{\dot{c}}{}^2 = q_{00} P_0 + q_{02} P_2 + q_{04} P_4, \tag{41}$$

где $q_{00} = \frac{24}{5} \overset{\dots}{Q}{}^2, \quad q_{02} = -\frac{48}{7} \overset{\dots}{Q}{}^2, \quad q_{04} = \frac{72}{35} \overset{\dots}{Q}{}^2.$

Далее будем обозначать $q_{00}$ через $\dot{m}$. Из выражения (41) видим, что вследствие нелинейности уравнений Эйнштейна квадрупольным излучением порождается наряду с другими компонентами волнового движения также центральносимметрическая компонента $\dot{m}$. Мы покажем, что именно этой компонентой описывается унос массы. Для того чтобы $\nu_k$ в выражении (34) оставались конечными, необходимо выбрать $\underset{2}{\alpha_{1k}}$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\underset{2}{\dot{\alpha}_{12}} = 2 \cdot \frac{1}{4!} q_{02},$$

$$\underset{2}{\dot{\alpha}_{14}} = 4 \cdot \frac{1}{6!} q_{04}.$$

Тогда из секулярных членов в $M$ остается только центральносимметрическая компонента и мы будем иметь

$$M = m_0 - m(u),$$

где $m_0$ — постоянная начальная масса, а $m(u)$ — масса, унесенная гравитационными волнами. Таким образом, масса, которая у Бонди получается усреднением аспекта массы по сфере, у нас с самого начала будет входить в решение уравнений Эйнштейна.

Покажем еще раз, что выбор $\alpha_{1k}$ не повлияет на величину массы, унесенной гравитационными волнами, и что эта масса полностью определяется центральносимметрической компонентной $\dot{m}$. Уравнение (6б) можем написать в виде

$$\dot{M} = -\dot{m}P_0 - q_{02}P_2 - q_{04}P_4 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\,k(k+1)\,(k+2)\,\alpha_{2k}P_k,$$

откуда

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\dot{M}(u,\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = -\dot{m},$$

так как

$$\int_0^{\pi}P_k(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = 0, \qquad \text{если } k \neq 0.$$

Этим примером мы показали, что соблюдение условий сходимости имеет не только чисто математическое значение, а ведет и к более удовлетворительным физическим результатам.

В заключение выражаю благодарность доценту И. Пийру за обсуждение результатов работы и проверку расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bondi H., Van der Burg M. G. J., Metzner A. W. K., Proc. Roy. Soc., Ser. A, **269**, 21 (1962).
2. Bondi H., Lectures on General Relativity, Brandeis Summer Institute in Theoretical Phys., 1964.

*Институт физики и астрономии*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
30/X 1967

*V. UNT*

**EINSTEINI VÕRRANDITE STRUKTUURIST AKSIAALSÜMMEETRILISEL JUHUL**

Artiklis vaadeldakse Einsteini võrrandite ligikaudsete koonduvate lahendite leidmise probleemi. Kasutatakse kiirete lähendite meetodit kombineerituna raadiusvektori negatiivsete astmete järgi rittaarendamise meetodiga. On näidatud, kuidas kogu probleemi raskuse võib taandada ühe võrrandi integreerimisele. Uuritakse lahendi koonduvuse tingimusi. Väljatöötatud teooria näitena vaadeldakse massi ülekandmist kvadrupoolkiirguse poolt. Erinevalt teistest autoritest saadakse tulemus, kus gravitatsioonilainete poolt ärakantud massi kirjeldab Einsteini võrrandite lahendis tõeline mass, mitte polaarnurkadest olenev massaspekt. Sellisele tulemusele jõudmisel etendavad olulist osa lahendi koonduvuse tingimused.

V. UNT

## ON THE STRUCTURE OF EINSTEIN'S EQUATIONS IN THE AXI-SYMMETRIC CASE

In this paper we have dwelt upon the problem of finding convergent solutions of Einstein's equations in any order of approximation. The fast approximation method, together with the method of expansion in negative powers of radius have been used. Bondi's method has been modified for obtaining equations containing coefficients of the power series expansions of the transverse metric, only. The conditions which the new function has to satisfy in order to give rise to a convergent solution of Einstein's equations, have been discussed. It has been shown that in the convergent solutions we have the real mass instead of the mass aspect. As an example of the theory developed in the paper, the mass loss caused by gravitational quadrupole radiation has been considered.