EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.2.09

Т. ТОБИАС

СОСТАВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПРИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

В статье [1] предлагается новый подход к проблеме классификации объектов [1]. Рассматривается случай, когда одна и та же проблема принятия решения (о классификации объектов) возникает многократно. Указывается, что, несмотря на отсутствие какой-либо связи между отдельными испытаниями, можно все же каждый раз успешно воспользоваться результатами всех испытаний. Дальнейшему анализу выдвинутых проблем посвящены статьи [2–5].

В данной заметке проблема изучается в несколько иной постановке. Рассматривается случай, когда пространство решений бесконечно, а число возможных состояний «природы» конечно. Потери измеряются квадратичной функцией. Отметим, что в силу расширения пространства решений построенная в работе последовательность решающих функций оказывается асимптотически оптимальной и без искусственной рандомизации. При доказательстве соответствующей теоремы мы воспользуемся методом работы [4].

1. Пусть Λ — пространство параметров (возможных состояний «природы»). Предположим, что Λ состоит из конечного числа параметров (чисел) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, которые недоступны непосредственному наблюдению. С каждым значением параметра λ связана случайная величина X, распределение $F(x, \lambda)$ которой зависит от значения неизвестного параметра λ. Без ограничения общности предположим, что на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ пространства Ω значений случайной величины X определена мера μ, относительно которой распределения $F(x, \lambda_1), \ldots, F(x, \lambda_m)$ являются абсолютно непрерывными, т. е., если $B \in \mathfrak{B}$, то $F(B, \lambda_i) = \int\limits_B f(x, \lambda_i)\, d\mu$ $(i = 1, \ldots, m)$. Предположим, что множество $S = \{x : f(x, \lambda_1) = 0, \ldots, f(x, \lambda_m) = 0\}$ является множеством нулевой μ-меры.

Наблюдаемыми величинами являются значения x случайной величины X. По наблюдению x нужно принять решение, при этом потери зависят от неизвестного значения параметра λ.

Пусть $A = (-\infty, \infty)$ — пространство решений. Если значением параметра $\lambda \in \Lambda$ является $\lambda = \lambda_i$, а решением — $a \in A$, то потери измеряются функцией $L(\lambda, a) = (\lambda_i - a)^2$.

Рассмотрим нерандомизированные решающие функции $t(x) = a \in A$. Среднее значение потери при использовании решающей функции $t(x)$ назовем риском и обозначим через $R(t, \lambda_i)$:

$$R(t, \lambda_i) = \int (t(x) - \lambda_i)^2 f(x, \lambda_i)\, d\mu. \tag{1}$$

Пусть задано априорное распределение на пространстве Λ: $P(\lambda = \lambda_i) = p_i$; $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Обозначим $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m)$. Поскольку точное значение параметра λ неизвестно, то потери измеряются средним риском $R(t, \bar{p})$:

$$R(t, \bar{p}) = \int \sum_{i=1}^{m} p_i (t(x) - \lambda_i)^2 f(x, \lambda_i) \, d\mu. \tag{2}$$

Решающая функция

$$t_{\bar{p}}(x) = [\sum_{j=1}^{m} p_j f(x, \lambda_j)]^{-1} \sum_{j=1}^{m} p_j \lambda_j f(x, \lambda_j), \tag{3}$$

минимизирующая средний риск $R(t, \bar{p})$, называется байесовским решением поставленной проблемы, а выражение

$$R(\bar{p}) = \int \sum_{i=1}^{m} p_i (t_{\bar{p}}(x) - \lambda_i)^2 f(x, \lambda_i) \, d\mu \tag{4}$$

— байесовским риском. Отметим, что $t_{\bar{p}}(x)$ определена однозначно, за исключением множества S нулевой μ-меры, и почти всюду $\min_j \lambda_j \leqslant t_{\bar{p}}(x) \leqslant \max_j \lambda_j$.

2. Пусть описанная выше проблема принятия решения появляется многократно. По реализации $\bar{x}_k = (x_1, \ldots, x_k)$ случайного вектора $\bar{X}_k = (X_1, \ldots, X_k)$ надо принять решение $t_k(\bar{x}_k) = a$. При этом плотность распределения $f(x, \lambda_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ каждой случайной величины зависит от значения параметра λ и все случайные величины $X_1, \ldots, X_k$ независимы. Если при каждом испытании неизвестный параметр λ является случайной величиной с известным априорным распределением $\bar{p}$ и если значения параметра λ при разных испытаниях суть независимые случайные величины, то уместно использовать решающую функцию (3), т. е. $t_k(\bar{x}_k) = t_{\bar{p}}(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда каждое решение связано с риском $R_k(\bar{p}) = R(\bar{p})$. Усредненный риск при n-кратном испытании равен байесовскому риску: $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} R_k(\bar{p}) = R(\bar{p})$.

Пусть априорное распределение $\bar{p}$ неизвестно, но зато известно, что при n-кратном испытании в l_i опытах параметр λ принимал значение λ_i, при этом $\sum_{i=1}^{m} l_i = n$. Если каждый раз использовать произвольную решающую функцию $t(x)$, то суммарный риск будет $l_1 R(t, \lambda_1) + \ldots + l_m R(t, \lambda_m)$. Обозначим $(l_1/n, \ldots, l_m/n) = \bar{l}_n$. Усредненный риск при n-кратном испытании равен

$$l_1/n \, R(t, \lambda_1) + \ldots + l_m/n \, R(t, \lambda_m) = R(t, \bar{l}_n). \tag{5}$$

Итак, если известен вектор частот $\bar{l}_n$, то уместно каждый раз воспользоваться байесовским решением $t_{\bar{l}_n}$. Средний проигрыш при n-кратном испытании равен байесовскому риску $R(t_{\bar{l}_n})$.

3. Допустим теперь, что не известны ни априорное распределение $\bar{p}$, ни вектор частот $\bar{l}_n$. Более того, мы не требуем, чтобы λ была случайной величиной. Другими словами, если при i-м испытании $\lambda = \lambda^i_{\alpha_1}$ и при j-м испытании $\lambda = \lambda^j_{\alpha_2}$, то

а) между $\lambda^i_{\alpha_1}$ и $\lambda^j_{\alpha_2}$ мы никакой связи не предполагаем;

б) механизм выбора («природой») значений $\lambda^i_{\alpha_1}$ и $\lambda^j_{\alpha_2}$ может быть произвольным. Отметим, что не исключена и возможность статистической игры против разумного «противника».

Обозначим через Λ^n множество всевозможных векторов значений параметра λ при n испытаниях, т. е., если истинными значениями параметра λ являются соответственно $\lambda^1_{\alpha_1}, \ldots, \lambda^n_{\alpha_n}$ $(\alpha_i = 1, \ldots, m)$, то $(\lambda^1_{\alpha_1}, \ldots, \lambda^n_{\alpha_n}) = \bar{\lambda}^n \in \Lambda^n$ (множество Λ^n содержит m^n элементов). Для простоты обозначим в дальнейшем $\lambda^k_{\alpha_k}$ через λ^k, подразумевая, что λ^k является одним из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Если при k-м испытании $\lambda = \lambda^k$, то риск k-го решения

$$R(t_k, \bar{\lambda}^k) = \int (t_k(\bar{x}_k) - \lambda^k)^2 f(\bar{x}_k, \bar{\lambda}^k)\, d\mu^k, \tag{6}$$

где $f(\bar{x}_k, \bar{\lambda}^k) = \prod\limits_{i=1}^{k} f(x_i, \lambda^i)$.

Докажем, что можно построить такую последовательность $T_n = \{t_n\}$ решающих функций $t_k(\bar{x}_k)$, что при $n > N(\varepsilon)$

$$R(T_n, \bar{\lambda}^n) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} R(t_k, \bar{\lambda}^k) < R(\bar{l}_n) + \varepsilon \tag{7}$$

при произвольном $\bar{\lambda}^n \in \Lambda^n$.

Другими словами, даже в случае, когда не известны ни априорные вероятности (или они вообще не существуют), ни частота появления различных значений параметра λ, существует асимптотически оптимальная последовательность решающих функций. При длинной серии испытаний (при незнании априорных вероятностей) усредненный риск почти равен байесовскому риску одиночного испытания (с известным априорным распределением).

В основе доказательства лежит простая идея: по результатам испытаний $\bar{x}_k$ найдем несмещенную оценку $\bar{q}\,(\bar{x}_k)$ для вектора частот $\bar{l}_k$ и на k-м испытании воспользуемся решающей функцией $t_{\bar{q}(\bar{x}_k)}\,(x_k)$.

4. Рассмотрим функции $h_j(x)$ со свойством $E_{\lambda_i}[h_j(X)] = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. Если $f(x, \lambda_1), \ldots, f(x, \lambda_m)$ являются линейно независимыми и $\int f^2(x, \lambda_i)\, d\mu < \infty$ $(i = 1, \ldots, m)$, то функции $h_j(x)$ можно построить следующим образом [6]. Очевидно,

$$f(x, \lambda_j) = f_j'(x) + f_j''(x), \quad f_j'(x) \in H_j, \quad f_j''(x) \in H_j,$$

где H_j представляет собой подпространство гильбертова пространства $L_2[\Omega]$, а базисом H_j являются функции $f(x, \lambda_1), \ldots, f(x, \lambda_{j-1})$, $f(x, \lambda_{j+1}), \ldots, f(x, \lambda_m)$. Тогда функции $h_j(x) = f_j''(x) \{\int [f_j''(x)]^2 d\mu\}^{-1}$ являются искомыми.

Обозначим $q_j(\bar{x}_k)=k^{-1}\sum_{i=1}^{k} h_j(x_i)$ и $\bar{q}_k=\bar{q}_k(\bar{x}_k)=(q_1(\bar{x}_k),\ldots,q_m(\bar{x}_k))$.

Очевидно, $\bar{q}_k$ является несмещенной оценкой для вектора частот $\bar{l}_k$.

Пусть

$$t_k^*(\bar{x}_k)=t_{\bar{q}_k}^k(\bar{x}_k)=[\sum_{j=1}^{m} q_j(\bar{x}_k)f(x_k,\lambda_j)]^{-1}\sum_{j=1}^{m} q_j(\bar{x}_k)\lambda_j f(x_k,\lambda_j). \quad (8)$$

Теорема. *Если* $T_n=\{t_k^*\}$ $(k=1,\ldots,n)$, *то при* $n>N(\varepsilon)$ *выполняется неравенство* (7).

Примем следующие обозначения: $\|\bar{a}\|=\max_j|a_j|$,

$$S_k=\{\bar{x}_k:\|\bar{q}_k-\bar{l}_k\|<\delta\},\qquad S_k^*=\{\bar{x}_k:\|\bar{q}_k-\bar{l}_k\|\geqslant\delta\}.$$

Пусть $\max_i\max[\int|h_i(x)|^2 f(x,\lambda_j)\,d\mu,\ \int|h_i(x)-1|^2 f(x,\lambda_j)\,d\mu]<M_1$ $(j=1,\ldots,m)$.

Из соотношений (1) и (3) видно, что если $\|\bar{\xi}-\bar{\eta}\|<\delta$, то

$$\max_i|R(t_{\bar{\xi}},\lambda_i)-R(t_{\bar{\eta}},\lambda_i)|<\varepsilon. \quad (9)$$

Поэтому

$$R(t_k^*,\bar{\lambda}^k)=\int(t_k^*(\bar{x}_k)-\lambda^k)^2 f(\bar{x}_k,\bar{\lambda}^k)\,d\mu^k=$$

$$=\int\int_{S_k}(t_k^*(\bar{x}_k)-\lambda^k)^2 f(x_k,\lambda^k)\,d\mu f(\bar{x}_{k-1},\bar{\lambda}^{k-1})\,d\mu^{k-1}+$$

$$+\int\int_{S_k^*}(t_k^*(\bar{x}_k)-\lambda^k)^2 f(x_k,\lambda^k)\,d\mu f(\bar{x}_{k-1},\bar{\lambda}^{k-1})\,d\mu^{k-1}\leqslant R(t_{\bar{l}_k},\lambda^k)+\varepsilon_1+M_2\operatorname{mes}S_k^*.$$

По неравенству Чебышева

$$\operatorname{mes}S_k^*=P(\|\bar{q}_k-\bar{l}_k\|\geqslant\delta\,|\,\lambda=\lambda^k)\leqslant M_1/k\delta^2,$$

поэтому $R(t_k^*,\bar{\lambda}^k)<R(t_{\bar{l}_k},\lambda^k)+\varepsilon_1+M_3/k$.

Если $n>N_2$, то

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{N_1}R(t_k^*,\bar{\lambda}^k)<n^{-1}\sum_{k=1}^{N_1}R(t_{\bar{l}_k},\lambda^k)+\varepsilon_2.$$

Если $n>N_3$, то

$$n^{-1}\sum_{k=N_1+1}^{n}M_3/k<n^{-1}M_3\int_{N_2+2}^{n-1}u^{-1}du<M_4\ln n/n<\varepsilon_3.$$

Поэтому при $n>\max(N_2,N_3)$

$$R(T_n,\bar{\lambda}^n)=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}R(t_k^*,\bar{\lambda}^k)<n^{-1}\sum_{k=1}^{n}R(t_{\bar{l}_k},\lambda^k)+\varepsilon.$$

Доказываемая формула (7) вытекает теперь из интуитивно очевидного (и легко доказуемого) факта, что при использовании на k-м испытании байесовской стратегии относительно вектора частот $\bar{l}_k$ усредненный риск будет меньше, чем при процедуре, где на каждом шаге используется байесовская стратегия относительно вектора частот $\bar{l}_n$, т. е.

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n} R(t_{\bar{l}_k}, \lambda^k) < n^{-1}\sum_{k=1}^{n} R(t_{\bar{l}_n}, \bar{\lambda}^n) = R(\bar{l}_n).$$

5. Отметим, что при доказательстве мы использовали лишь ограниченность решающей функции (3) и неравенство (9). Поэтому результаты работы обобщаются на широкий класс функции потерь $L(\lambda, a)$. Случай бесконечного пространства Λ требует специального изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Robbins H., Proc. Second Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951, p. 131—148.
2. Hannan J. F., Contr. Theory of Games, **3**, 97—139 (1957); Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press., No. **39** (1957).
3. Robbins H., Hannan J. F., Ann. Math. Stat., **26**, 1, 37 (1955).
4. Samuel E., Ann. Math. Stat., **34**, 3, 1079 (1963).
5. Samuel E., Ann. Math. Stat., **35**, 4, 1606 (1964).
6. Robbins H., Ann. Math. Stat., **35**, 1, 1 (1964).
7. Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, М., 1963.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
17/X 1966

T. TOBIAS

KORDUV OTSUSTUSEPROBLEEM RUUT-KAOFUNKTSIOONI PUHUL

Vaadeldakse olukorda, kus ühes ja samas situatsioonis tuleb vaatluse põhjal korduvalt võtta vastu otsus. Seejuures tundmatute parameetrite väärtuste hulk on lõplik, võimalike otsuste hulk aga lõpmatu. Kadusid mõõdetakse ruutfunktsiooniga. Töös tuletatakse asümptootiliselt optimaalne mitterandomiseeritud otsusefunktsioonide jada, s. t. piiril saavutatakse Bayesi risk ka juhul, kui puudub aprioorne informatsioon.

T. TOBIAS

THE COMPOUND DECISION PROBLEM WITH QUADRATIC LOSS FUNCTION

The compound decision problem is considered in the case when the space of parameters is finite and the space of decisions is infinite. The loss function is quadratic. Asymptotically optimal nonrandomized sequence of decision functions is derived, i. e. in the limit, the Bayes risk is obtained.