EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.2.08

Э. РАЙК

О МЕТОДЕ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

Рассмотрим задачу нахождения минимума функционала $f(x)$ на пересечении множеств $Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$, где множества Q_i имеют вид $Q_i = \{x : g_i(x) \leqslant 0\}$, а функционал $f(x)$ предполагается заданным на всем гильбертовом пространстве H. Метод штрафных функций вместо сформулированной задачи на условный минимум функционала $f(x)$ позволяет решать последовательность задач на безусловный минимум функционала

$$F_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \Psi_i^n(g_i(x)), \tag{1.1}$$

где $\Psi_i^n(g_i(x))$ — штрафные функции.

Штрафные функции $\Psi_i^n(t)$ являются монотонно возрастающими функциями действительной переменной t. Последовательность штрафных функций задается так, что $\Psi_i^n(t) \geqslant 0$ для всех n и t, а при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\Psi_i^n(t) \to \infty \text{ для } t > 0 \\ &\Psi_i^n(t) \to 0 \text{ для } t < 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

С вычислительной точки зрения удобно задавать выпуклые и дифференцируемые штрафные функции, так как, если функции $\Psi_i^n(t)$ и функционалы $g_i(x)$ выпуклы и дифференцируемы, то выпуклы и дифференцируемы и функционалы $\Psi_i^n(g_i(x))$. Этим условиям удовлетворяют, например, функции

а) $$\Psi_i^n(g_i(x)) = [K_n g_i(x)_+]^\alpha, \qquad \alpha > 1, \tag{1.3}$$

где $$g_i(x)_+ = \max\{0, g_i(x)\}$$

$$K_n \geqslant 0, \ \lim_{n\to\infty} K_n = \infty \text{ здесь и дальше,}$$

б) $$\Psi_i^n(g_i(x)) = a^{K_n g_i(x)}, \qquad a > 1.$$

Допустим сначала, что задано лишь одно ограничение $g(x) \leqslant 0$. Ограничение $g(x) \leqslant 0$, задающее множество Q, предполагается корректным в том смысле, что из условия $g(x^n) \to +0$ при $n \to \infty$ следует $\varrho(x^n, Q) \to 0$.

По методу штрафных функций решается (с точностью до ε_n, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$) последовательность задач на безусловный минимум функционала $f(x) + \Psi^n(g(x))$. Определяется последовательность x^n

$$f(x^n) + \Psi^n(g(x^n)) \leqslant d_n + \varepsilon_n$$
$$d_n = \inf_{x \in H} [f(x) + \Psi^n(g(x))]. \tag{1.4}$$

Верна следующая теорема, доказательство которой приведено в работе [4].

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, Q непусто, $d_n > d > -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n(g(x)) = 0$ на множестве R, всюду плотном в Q. Тогда в алгоритме* (1.4) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x^n) \leqslant f^* = \inf\limits_{x \in Q} f(x)$. *Если ограничение $g(x)$ корректное, а $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности Q, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^n) = f^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x^n, Q) = 0$.*

Замечание. В теореме 1, как и в последующих теоремах, требование $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n(g(x)) = 0$ на множестве R, всюду плотном в Q, не ограничительно. Мы можем это требование всегда удовлетворить, выбрав штрафную функцию так, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n(t) = 0$ для $t \leqslant 0$. Но если $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n(0) = c$, где $0 < c < \infty$ и $g(x) \geqslant 0$ для всех x, то это требование удовлетворить нельзя. Однако утверждение теоремы остается в силе. Разница состоит лишь в том, что $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x^n) = f^* + c$.

Теорема 1 обобщается на случай, когда множество Q задается несколькими корректными ограничениями, т. е. $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i$, где множества $Q_i = \{x : g_i(x) \leqslant 0\}$. Надо только выяснить, когда из условия $\varrho(x_n, Q_i) \to 0$ следует, что $\varrho(x_n, Q) \to 0$.

Будем называть систему множеств Q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ корректной, если $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i \neq \varnothing$ и из условия $\varrho(x_n, Q_i) \to 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ при $n \to \infty$ следует, что $\varrho(x_n, Q) \to 0$.

Теорема 1′. *Пусть $f(x)$ и $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ непрерывны, $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i$ непусто, $d_n > d > -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n(x) = 0$ на множестве R, всюду плотном в Q. Тогда в алгоритме* (1.4) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x^n) \leqslant f^* = \inf\limits_{x \in Q} f(x)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_i(x^n) \leqslant 0$. *Если ограничения $g_i(x)$ корректные и задают корректную систему множеств, а $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности Q, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^n) = f^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x^n, Q) = 0$.*

Ниже мы увидим, что если последовательность $\{x^n\}$ ограничена, т. е. принадлежит некоторому шару S, то многие системы множеств становятся корректными с добавлением шара S. Последовательность $\{x^n\}$ в алгоритме (1.4) является ограниченной, если минимизируемый функционал удовлетворяет условию $f(x)\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$ (например, если $f(x)$ — сильно выпуклый). В противном случае можно использовать регуляризацию, предложенную в работах [2, 3].

Добавим функционалу $F_n(x)$ сильно выпуклый функционал $\alpha_n\varphi(x)$ и будем искать безусловный минимум функционала

$$\Phi_n(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\Psi_i^n(g_i(x))+\alpha_n\varphi(x)=f(x)+\Psi^n(x)+\alpha_n\varphi(x), \qquad (1.5)$$

где $\alpha_n>0$ и $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Последовательность $\{x^n\}$ будем определять аналогично алгоритму (1.4).

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ *и* $g_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *непрерывны,* $Q=\bigcap\limits_{i=1}^{m}Q_i$ *непусто,* $d_n>d>-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\Psi^n(x)=0$ *на множестве* R, *всюду плотном в* Q. *Тогда в алгоритме* (1.4) *или* (1.4), (1.5) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f(x^n)\leqslant f^*=\inf\limits_{x\in Q}f(x)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}g_i(x^n)\leqslant 0$. *Если последовательность* $\{x^n\}$ *ограничена, а ограничения* $g_i(x)$ *корректные и задают корректную систему множеств вместе с некоторым шаром* S, *а* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности* Q, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}f(x^n)=f^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho(x^n, Q)=0$.

Доказательства теорем 1′ и 2 несущественно отличаются от доказательства теоремы 1 и могут быть поэтому опущены.

Такие последовательности $\{x^n\}$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho(x^n, Q)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f(x^n)=f^*=\inf\limits_{x\in Q}f(x)$, называют обобщенными минимизирующими последовательностями. Вопросы их сходимости исследованы в работе [2].

В работе [4] указаны следующие корректные ограничения:

а) если пространство E конечномерно, $g(x)$ непрерывен и $S=\{x:g(x)\leqslant\varepsilon\}$ ограничено для некоторого $\varepsilon>0$;

б) если $g(x)$ выпуклый, Q ограничено и существует такое x^0, что $g(x^0)<0$;

в) если $g(x)$ выпуклый и $\|g'(x)\|\geqslant\varepsilon>0$ для всех таких x, что $g(x)=0$ (здесь $g'(x)$ означает произвольный опорный функционал к $g(x)$ в точке x);

г) если $g(x)$ дифференцируем, Q ограничено, $g'(x)$ удовлетворяет условию Липшица и существуют $\varepsilon>0$, $\delta>0$ такие, что $\|g'(x)\|\geqslant\varepsilon$ при $|g(x)|\leqslant\delta$;

д) если $g(x)\geqslant 0$ для всех x (т. е. $Q=\{x:g(x)=0\}$), $g(x)$ дифференцируем, $g'(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $\|g'(x)\|^2\geqslant\lambda g(x)$, $\lambda>0$;

е) если $g(x)$ равномерно выпуклый.

Остается выяснить, какие системы множеств являются корректными.

2. Корректные системы множеств

Докажем сначала вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть в рефлексивном банаховом пространстве* E *дано пересечение слабо замкнутых множеств* $Q=\bigcap\limits_{i=1}^{m}Q_i\neq\varnothing$ *и пусть имеется* *ограниченная последовательность* $\{x_n\}$ *такая, что* $\varrho(x_n, Q_i)\to 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *при* $n\to\infty$. *Тогда* Q *содержит все слабо предельные точки последовательности* $\{x_n\}$.

Доказательство. Пусть x^* — слабо предельная точка последовательности $\{x_n\}$, т. е. существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся слабо к x^*. Проектируем все точки подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ на одно из множеств, например на Q_s. Благодаря слабой замкнутости Q_s проекция каждой точки подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ существует*, хотя, может быть, и не единственная. Выберем любую среди таких проекций и составим последовательность $\{\pi_s x_{n_k}\}$. Согласно предположениям $\|\pi_s x_{n_k} - x_{n_k}\|\to 0$ и $(c, x_{n_k} - x^*)\to 0$ при $n_k\to\infty$, для любого линейного функционала c из сопряженного пространства $c\in E^*$.

Получим, что последовательность $\{\pi_s x_{n_k}\}$ тоже сходится слабо к x^*. Действительно, для любого линейного функционала $c\in E^*$ имеем

$$(c, \pi_s x_{n_k} - x^*) = (c, \pi_s x_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - x^*) = (c, \pi_s x_{n_k} - x_{n_k}) + (c, x_{n_k} - x^*)\to 0.$$

Благодаря слабой замкнутости Q_s получаем $x^*\in Q_s$. Но так как множество Q_s может быть любым, то $x^*\in Q$.

Поскольку для конечномерного пространства слабая и сильная сходимости совпадают, лемма 1 для конечномерного пространства может быть переформулирована следующим образом.

Лемма 1′. *Пусть в эвклидовом пространстве* E^n *дано пересечение замкнутых множеств* $Q=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i\neq\varnothing$ *и пусть имеется ограниченная последовательность* $\{x_n\}$ *такая, что* $\varrho(x_n, Q_i)\to 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *при* $n\to\infty$. *Тогда* Q *содержит все предельные точки последовательности* $\{x_n\}$.

Лемма 2. *Пусть в эвклидовом пространстве* E^n *дано пересечение замкнутых множеств* $Q=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i\neq\varnothing$ *и пусть дана ограниченная последовательность* $\{x_n\}$ *такая, что* $\varrho(x_n, Q_i)\to 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *при* $n\to\infty$. *Тогда и* $\varrho(x_n, Q)\to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Допустим обратное, т. е. предположим, что $\varrho(x_n, Q)\not\to 0$, тогда существует $\varepsilon>0$ такое, что бесконечное число точек последовательности $\{x_n\}$ не принадлежит множеству $Q_\varepsilon=\{x: \|x-y\|\leqslant\varepsilon, y\in Q\}$. Но последовательность $\{x_n\}$ ограничена, следовательно, существует предельная точка последовательности, не принадлежащая множеству Q. Это противоречит лемме 1′, что и доказывает утверждение.

Замечание 1. Леммы 1, 1′ и 2 останутся справедливыми, если вместо ограниченности последовательности $\{x_n\}$ потребовать ограниченность одного из множеств, например Q_1.

Замечание 2. В случае, если все множества Q_i замкнутые и выпуклые, требование ограниченности последовательности $\{x_n\}$ в леммах 1, 1′ и 2 можно заменить требованием ограниченности множества Q, как это сделано в работе [1].

---

* В рефлексивном банаховом пространстве проекция на слабо замкнутое множество существует, т. е. для любого $x\in E$ существует $\bar{y}\in Q$ такое, что $\|x-\bar{y}\| = \inf_{y\in Q}\|x-y\|$.

Для бесконечномерного пространства задача определения корректных систем множеств усложняется. Мы ограничимся здесь лишь выпуклыми замкнутыми множествами.

Лемма 3. *Пусть в гильбертовом пространстве H даны выпуклые замкнутые множества Q_1 и Q_2 такие, что Q ограничено и $\overset{0}{Q_1} \cap Q_2 \neq \emptyset$*; тогда из того, что $\varrho(x_n, Q_i) \to 0$ $(i = 1, 2)$ при $n \to \infty$ следует, что $\varrho(x_n, Q) \to 0$.*

Доказательство. Выберем любую точку x_k последовательности $\{x_n\}$ такую, что $x_k \notin Q$. Проекцию точки x_k на множество Q обозначим через πx_k. В силу замкнутости и выпуклости множества Q проекция существует и является единственной.

Оценим $\varrho(x_k, Q)$ в предположении, что $\varrho(x_k, Q_1) \leqslant \varepsilon_k$ и $\varrho(x_k, Q_2) \leqslant \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k > 0$. Зафиксируем $\bar{x} \in \overset{0}{Q_1} \cap Q_2$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что шар с центром $\bar{x}$ и радиусом δ принадлежит Q_1, т. е. $S(\bar{x}, \delta) \subset Q_1$.

В силу ограниченности множества Q имеем

$$\|\bar{x} - \pi x_k\| \leqslant R = \sup_{x, y \in Q} \|x - y\| < \infty. \tag{2.1}$$

Проектирующий вектор $\pi x_k - x_k$ задает опорную гиперплоскость для множества Q и по лемме Дубовицкого—Милютина опорный вектор для множества Q в точке πx_k представим в виде суммы [7]

$$\pi x_k - x_k = c_1 + c_2, \tag{2.2}$$

где c_1 — опорный вектор для множества Q_1 в точке πx_k;
c_2 — опорный вектор для множества Q_2 в точке πx_k.

В случае, если один из опорных векторов может быть нулевым вектором, например $c_1 = 0$, получим

$$\|\pi x_k - x_k\| = \varrho(x_k, Q) = \varrho(x_k, Q_2) \leqslant \varepsilon_k. \tag{2.3}$$

Аналогично, если $c_2 = 0$, имеем

$$\varrho(x_k, Q) = \varrho(x_k, Q_1) \leqslant \varepsilon_k. \tag{2.4}$$

Пусть теперь вектор $\pi x_k - x_k$ представим суммой только ненулевых опорных векторов, т. е. $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. Тогда имеем две опорные гиперплоскости, проходящие через точку πx_k. При этом множество Q заключено между ними в том смысле, что

$$\begin{gathered} (c_1, x) \geqslant (c_1, \pi x_k) \\ (c_2, x) \geqslant (c_2, \pi x_k), \quad x \in Q. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Между опорными гиперплоскостями находятся также точка $\bar{x}$ и по крайней мере половина шара $S(\bar{x}, \delta)$ так, что в эту половину шара можно вписать шар $S_1(\bar{x}_1, \delta/4)$, целиком находящийся между опорными гиперплоскостями. По другую сторону опорных гиперплоскостей находится точка x_k — центр шара $S_2(x_k, \varepsilon_k)$, который пересекает обе гиперплоскости.

* Через Q^0 обозначается внутренность множества Q.

Натянем на векторы c_1 и c_2 двумерную плоскость E и сдвинем ее на вектор πx_k. Спроектируем пространство H на сдвинутую плоскость E' и обозначим проекцию точки x на E' через $\overline{\pi} x$. Тогда опорные гиперплоскости проектируются в прямые соответственно l_1 и l_2, шар $S_1(\overline{x}_1, \delta/4)$ проектируется в круг $K_1(\overline{\pi x}_1, \delta/4)$, а шар $S_2(x_k, \varepsilon_k)$ — в круг $K_2(x_k, \varepsilon_k)$ (точка x_k лежит на E' по построению).

При проектировании на плоскость расстояния между точками не увеличиваются, т. е.

$$\begin{gathered}\|\overline{\pi x}_1 - \pi x_k\| \leqslant \|\overline{x}_1 - \pi x_k\| \leqslant \\ \leqslant \|\overline{x}_1 - \overline{x}\| + \|\overline{x} - \pi x_k\| < \delta + R = R_1.\end{gathered} \tag{2.6}$$

На двумерной плоскости имеем две пересекающиеся в точке πx_k прямые l_1 и l_2 такие, что между ними находится круг $K_1(\overline{\pi x}_1, \delta/4)$, а по другую сторону прямых лежит точка x_k.

Но круг $K_2(x_k, \varepsilon_k)$ пересекает как прямую l_1, так и прямую l_2, следовательно,

$$\varrho(x_k, Q) = \|\pi x_k - x_k\| \leqslant \varepsilon_k \frac{4R_1}{\delta}. \tag{2.7}$$

При $k \to \infty$ $\varepsilon_k \to 0$, следовательно, и $\varrho(x_k, Q) \to 0$.

Лемма 4. *Пусть в гильбертовом пространстве H даны выпуклые замкнутые множества Q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ такие, что $Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ ограничено и $Q_1 \cap \bigcap_{i=2}^{m} Q_i^0 \neq \emptyset$. Тогда из условия $\varrho(x_n, Q_i) \to 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ следует, что $\varrho(x_n, Q) \to 0$ при $n \to \infty$ (т. е. система является корректной).*

Доказательство. Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 3, только здесь пространство H проектируется на многомерные сдвинутые подпространства (до размерности m).

Для упрощения доказательства можно было бы потребовать ограниченности одного из множеств, например Q_1. Тогда, применяя последовательно лемму 3, сначала для множества Q_1 и Q_2, затем для $Q_1 \cap Q_2$ и Q_3 и т. д., можно доказать утверждение леммы.

Замечание. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. принадлежит некоторому шару S, то в лемме 3 и 4 можно отказаться от требования ограниченности Q, и система множеств Q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ становится корректной с добавлением шара S.

Корректную систему образуют, кроме того, множества, заданные линейными равенствами и неравенствами, а также система равномерно выпуклых множеств с одним выпуклым множеством.

Лемма 5. *Пусть даны две корректные системы множеств $Q_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ и $Q_j (j = m+1, m+2, \ldots, n)$ с пересечениями соответственно $Q' = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ и $Q'' = \bigcap_{j=m+1}^{n} Q_j$. Если множества Q' и Q'' образуют корректную систему множеств, то система множеств $Q_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ корректна.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_s\}$ такая, что $\varrho(x_s, Q_k) \to 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда по условиям леммы $\varrho(x_s, Q') \to 0$ и $\varrho(x_s, Q'') \to 0$. Но по условию система множеств Q', Q'' также корректна, следовательно, $\varrho(x_s, Q) \to 0$, где $Q = Q' \cap Q'' = \bigcap_{k=1}^{n} Q_k$.

3. О применении метода

Для решения задач нелинейного программирования теорема 2 переформулируется.

Теорема 2'. *Пусть в пространстве E^n функции $f(x)$ и $g_i(x)$ непрерывны, $Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ непусто, $d_n > d > -\infty$. Если последовательность $\{x^n\}$ в алгоритме* (1.4) *или* (1.4), (1.5) *ограничена, то* $\lim_{n \to \infty} f(x^n) = f^*$, $\lim_{n \to \infty} \varrho(x^n, Q) = 0$.

Область применения метода штрафных функций при решении задач нелинейного программирования ясна из сформулированных выше результатов. Рассмотрим применение этого метода для решения задач оптимального управления.

Пусть дано векторное уравнение системы

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x + \mathbf{B}(t)u, \tag{3.1}$$

где x — n-мерный вектор;
$\mathbf{A}(t)$ — матрица $n \times n$;
$\mathbf{B}(t)$ — матрица $n \times m$;
u — m-мерный вектор, $n \geqslant m$.

Фиксированы начальная точка x_0 и время T, а система предполагается вполне управляемой. На множестве Q пространства $L_2[0, T]$ требуется минимизировать функционал

$$f(u) = \int_0^T F(x, u, t)\,dt + \Phi(x(T)). \tag{3.2}$$

Свойства функционала $f(u)$ вида (3.2) исследованы Б. Т. Поляком в работе [6]. Мы остановимся на исследовании множеств, заданных разными ограничениями, и выясним, когда они образуют корректную систему.

При исследовании ограничений, встречающихся в задаче оптимального управления (3.1), (3.2), можно получить следующую таблицу:

Ограничение	Выпуклость	Существование внутренних точек
$Q_1 = \{u : \lvert u(t)\rvert \leqslant 1\}$	Выпукло	Не имеет
$Q_2 = \{u : \lVert u(t)\rVert_{L_2} \leqslant 1\}$	Сильно выпукло	Имеет
$Q_3 = \{u : x(T) = c\}$	Выпукло	Не имеет
$Q_4 = \{u : g(x, t) \leqslant 0\}$	Выпукло, если $g(x, t)$ выпукло по x для всех $t \in [0, T]$	Имеет, если существует u^0 такое, что $g(x^0, t) < < 0$ для всех $t \in [0, T]$

Пусть теперь множество Q задается несколькими ограничениями и пусть оно непусто. Тогда корректную систему образуют следующие комбинации множеств: 1) Q_1, Q_2; 2) Q_2, Q_3; 3) Q_2, Q_4; 4) Q_1, Q_2, Q_4, если $Q_1 \cap Q_4^0 \neq \varnothing$. Действительно, первые три комбинации корректные, так как множество Q_2 сильно выпукло. Для доказательства корректности системы Q_1, Q_2, Q_4 заметим, что множества Q_1, Q_4 образуют корректную систему по лемме 3. Но множество Q_2 сильно выпукло, следовательно, и система из двух множеств Q_2 и $Q_1 \cap Q_4$ корректна. Тогда по лемме 5 корректна и система Q_1, Q_2, Q_4.

Эти множества легко задавать корректными ограничениями. Например: $Q_1 = \{u : g_1(u) = \int\limits_0^T [(|u(t)| - 1)_+]^2 dt \leqslant 0\}$, $Q_2 = \{u : g_2(u) = \|u(t)\| - 1 \leqslant 0\}$, $Q_3 = \{u : g_3(u) = (x(T) - c, x(T) - c) \leqslant 0\}$. К указанным системам множеств применимы теорема 1′ и результаты работы [2]. В частности, если $f(u)$ сильно выпуклый функционал, то полученная методом штрафных функций последовательность сходится сильно к точке минимума u^*, где $f(u^*) = \min\limits_{u \in Q} f(u)$.

Метод штрафных функций может быть применен и для нахождения решения системы функциональных неравенств вида $g_i(x) \leqslant 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) [5]. Действительно, задачу решения системы неравенств можно рассматривать как задачу нахождения условного минимума для функционала $f(x) \equiv 0$. В этом случае известна величина $f^* = \inf\limits_{x \in Q} [f(x)] = 0$, что значительно упрощает задачу.

Определим последовательность $\{x^n\}$ так, что

$$\Psi^n(x) = \sum_{i=1}^m \Psi_i^n(g_i(x^n)) \leqslant \varepsilon_n. \tag{3.3}$$

Тогда имеет место

Теорема 3. *Пусть* $g_i(x)$ *непрерывны,* Q *непусто,* $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n(x) = 0$ *на множестве* R, *всюду плотном в* Q. *Если ограничения* $g_i(x)$ *корректные и задают корректную систему множеств, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x^n, Q) = 0$.

В ряде случаев исходную задачу нахождения решения системы неравенств $g_i(x) \leqslant 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) полезно заменить задачей на условный минимум некоторого функционала $f(x)$ на множестве Q. Если в качестве функционала $f(x)$ задать некоторый сильно выпуклый функционал, то, во-первых, можно будет отказаться от требований типа ограниченности, как это следует из замечания к теореме 1. Во-вторых, в ряде случаев можно утверждать сильную сходимость последовательности $\{x^n\}$, определенной по алгоритму (1.4), а именно:

Теорема 4. *Пусть функционалы* $g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) *непрерывны, выпуклы и корректны,* Q *непусто,* $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n(x) = 0$ *на множестве* R, *всюду плотном в* Q. *Тогда последовательность в алгоритме* (1.4) *сходится сильно к* $x^* \in Q$, *если выполнено одно из следующих условий:*

1) $Q_1 \cap \bigcap\limits_{i=2}^m Q_i^0 \neq \varnothing$;

2) $g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) *линейны*;

3) Q_i ($i = 1, 2, \dots, m$) *равномерно выпуклы* (*кроме, быть может, одного*);

4) x *принадлежит конечномерному пространству.*

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1 в работе [2] и из теоремы 1′.

К статье приложен список работ, посвященных методу штрафных функций [8–16]. Решение задач оптимального управления методом штрафных функций рассматривается в работах [8–11].

В заключение автор выражает благодарность Б. Т. Поляку за полезные советы и И. А. Полетаевой за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pietrzykowsky T., "Inform. Process. 1962", Amsterdam, 1963, pp. 185—189.
2. Левитин Е. С., Поляк Б. Т., Докл. АН СССР, **168**, № 5, 997—1000 (1966).
3. Тихонов А. Н., Докл. АН СССР, **162**, № 4, 763—765 (1965).
4. Левитин Е. С., Поляк Б. Т., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **6**, № 5, 787—823 (1966).
5. Мазуров В. Д., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **6**, № 2, 342—347 (1966).
6. Поляк Б. Т., Докл. АН СССР, **166**, № 2, 287—290 (1966).
7. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **5**, № 3, 402 (1965).
8. Красовский Н. Н., ПММ, **2**, 271—276 (1960).
9. Островский Г. М., Автоматика и телемехан., **23**, № 10, 1284—1289 (1962).
10. Okamura K., J. Soc. Industr. Appl. Math., **A2**, No. 3, 317—332 (1964).
11. Russell D. L., J. Soc. Industr. Appl. Math., **A2**, No. 3, 409—422 (1964).
12. Pietrzykowsky T., Prace zakl. apar. mat. PAN, Ser. A., No. 11 (1961).
13. Butler T., Martin A. V., J. Math. and Phys., **41**, No. 3, 291—299 (1962).
14. Fiacco A. V., McCromick G. P., Man. Sci., **10**, No. 2, 360—366; No. 4, 601—618 (1964).
15. Pomentale T., J. Math. Anal. Appl., **10**, No. 1, 216—220 (1965).
16. Goldstein A. A., Kripke B. R., Numer. Math., **6**, No. 1, 47—48 (1964).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
10/X 1966

E. RAIK

TRAHVIFUNKTSIOONI MEETODIST

Vaatlusele on võetud funktsionaali $f(x)$ miinimumi otsimine kinniste hulkade ühisosal $Q=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ Hilberti ruumis. Uuritakse jada $\{x_n\}$ koonduvust, mis on saadud trahvifunktsiooni meetodil kõnesoleva ülesande lahendamisel. Trahvifunktsiooni meetodi kasutamise näitena esitatakse järgmised: 1) mitme piirava tõkkega lineaarsete optimaaljuhtimisülesannete lahendamine, 2) funktsionaalvõrratuste süsteemi mingi lahendi leidmine.

E. RAIK

ON THE PENALTY FUNCTIONS METHOD

The minimization problem for a functional $f(x)$ on the intersection of closed sets $Q=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ in a Hilbert space is considered. The convergence of the sequence obtained by the penalty functions method is also discussed. It is shown that this method may be used in the following two cases: 1) linear optimal control problems with many constraints, 2) the solution of systems of inequalities.