EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.2.07

И. КЕЙС

О ПРИМЕНЕНИИ ПРИЕМА ВАЛЕНТАЙНА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Рассмотрим задачу минимизации функционала $I^1 = f[x(T), T] + \int\limits_0^T f_0^1(x, u, v, t)\, dt$ на множестве ограничений, приводимых к виду

$$dx_i/dt = f_i(x, u, v, t) \qquad (i = \overline{1, n}) \tag{1.0}$$

$$\varphi_j(x, t) < 0 \qquad (j = \overline{1, m_1},\ m_1 \leqslant n) \tag{1.1}$$

$$\psi_s(x, u, v, t) \leqslant 0 \qquad (s = \overline{1, n_1},\ n_1 \leqslant k), \tag{1.2}$$

и при краевых условиях

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad T = T_0 = \text{const.} \tag{1.3}$$

Относительно числа k кусочно гладких и непрерывных управлений u предположим условие $k \leqslant n$; дискретные управления $v_l (l = \overline{1, N})$ определяют своими значениями конечное множество векторов V_{ml}.

Определим новые переменные x_{n+j} и управления u_{k+s} [1] посредством равенств, эквивалентных ограничениям (1.1) и (1.2):

$$\exp(x_{n+j}) + \varphi_j(x, t) = 0 \tag{1.4}$$

$$u_{k+s}^2 + \psi_s(x, u, v, t) = 0. \tag{1.5}$$

Если дополнить систему уравнений (1.0) согласно [2] уравнением $dt(d\tau)^{-1} = 1$ с краевым условием $t(0) = 0$ и ввести функцию $f_0 = f_0^1 + (\partial f/\partial x_i) f_i + \partial f/\partial t$, то рассматриваемая задача окажется эквивалентной задаче минимизации функционала $I = \int\limits_0^\tau f(x, u, v, \tau)\, d\tau$ при ограничениях (1.0)—(1.2) и условиях $x_i(0) = x_{i0}$ со свободным τ, заменяющим t в формулах (1.0)—(1.5). Всюду в дальнейшем t играет роль τ.

Предположим, что благодаря свойствам функций $\varphi_j(x, t)$ и перемене нумерации можно считать x_j функциями от переменных x_{j1}, x_{n+j}, t, обладающими необходимыми в дальнейшем свойствами непрерывности и дифференцируемости. Независимые переменные определяются системой дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
& dx_{j1}/dt = f_{j1}(x_{j1}, x_{n+j}, u, v, t) \qquad (j_1 = \overline{m_1+1, n}) \\
& dx_{n+j}/dt = -\exp(-x_{n+j})\,(\partial\varphi_j/\partial x_{i1} f_{i1} + \partial\varphi_j/\partial t_1),
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

в которой индекс 1 означает подстановку выражений $x_j(x_{j1}, x_{n+j}, t)$ после окончания остальных операций; краевые условия для переменных x системы уравнений (1.6) суть значения $x_{j1.0}, x_{n+j.0} = \ln[-\varphi_j(x_0, 0)]$. Для вектора (x_{j1}, x_{n+j}) применяется обозначение x.

Допустим, что функции ψ_s обладают всеми свойствами, необходимыми для существования решений $\overset{0}{u}_1 \ldots \overset{0}{u}_{k1}$ $[u^0 = u^0(x, v, u_0, u_1, t)$, $u_0 = (u_{n1+1} \ldots u_k)$, $u_1 = (u_{k+1} \ldots u_{k+n1})]$, удовлетворяющих равенствам (1.5). Заменим в правых частях уравнений (1.6) и в выражении для функции f_0 зависимые переменные и управления на соответствующие значения функций x_j, u^0 и обозначим результаты подстановки символами y_i $(i = \overline{1, n})$, y_0.

Будем считать, что функции y_ν (x, u_0, u_1, v, t) определены, непрерывны по x, u_0, u_1, v, t и непрерывно дифференцируемы по x, t; тогда (см. [2]) для задачи применим принцип максимума Понтрягина; в частности, оптимальные управления доставляют максимум функции $H_0 = p_\nu f_\nu$ $(\nu = \overline{0, n})$ на множестве v, w $(w = (u_0, u_1))$, а краевые условия для импульсов p, удовлетворяющих уравнениям

$$dp_\nu/dt = -p_\mu \partial y_\mu/\partial x_\nu \qquad (\mu = \overline{0, n}), \tag{1.7}$$

суть:

$$p_0(T) = -1, \quad p_{\nu1}(T) = 0 \qquad (\nu_1 = \overline{1, n}). \tag{1.8}$$

Ввиду постоянства импульса p_0, согласно уравнениям (1.7) и первому из условий (1.8), функцию H_0 можно представить в виде суммы

$$p_{\nu1} y_{\nu1}(x, v, w, t) - y_0(x, v, w, t). \tag{1.9}$$

Предположим, что известно конечное число множеств $R_{ml}(x, p, u, u_1, t)$, имеющих в качестве множества взаимных пересечений конечную совокупность точек в пространстве x, p, u, u_1, t, на которых векторы V_{ml} состоят из оптимальных дискретных управлений $v_{ml}(ml)$

$$V_{ml} = [v_{m1}(m_1) \ \ldots \ v_{mN}(mN)].$$

Допустим, кроме того, что множества R_{ml} являются открытыми областями относительно управлений u, u_1. В каждой из таких областей для определения оптимальных управлений u, u_1 имеем уравнения

$$p_{\nu1}\, \partial y_{\nu1}/\partial w_\sigma = \partial y_0/\partial w_\sigma \qquad (\sigma = \overline{1, k}), \tag{1.10}$$

которые образуют относительно импульсов линейную систему. В области R_{ml} для системы уравнений (1.10) возможны два случая:

1° ранг матрицы $\|\partial y_{\nu1}/\partial w_\sigma\|$ равен числу k

2° ранг матрицы $\|\partial y_{\nu1}/\partial w_\sigma\|$ меньше числа k.

В первом случае можно выразить импульсы p_σ как линейные функции от p_q $(q = \overline{k+1, n})$ с коэффициентами, зависящими от w_σ. Подставляя эти выражения для p_σ в уравнения (1.7), получим линейную систему уравнений относительно производных dw_σ/dt, решая которую составим соответствующие дифференциальные уравнения для определения управлений (с правыми частями, зависящими от x, p_q, w_σ, t). Краевые условия для определения решений нетрудно получить из равенств (1.8), если предварительно осуществить интеграцию уравнений (1.6) и оставшейся для определения p_q части дифференциальных уравнений (1.7). Сложность этой задачи, вообще говоря, того же порядка, что и краевой двухточечной задачи [3].

Во втором случае всякая система равенств, выражающая равенство нулю всех миноров матрицы $\|\partial y_{v1}/\partial w_\sigma\|$ порядка $k_1 \leqslant k$, должна быть дополнена по теореме Кронекера—Капелли соответствующей линейной относительно членов $\partial y_0/\partial w_\sigma$ системой равенств, выражающих обращение в нуль всех миноров порядка k_1 «расширенной» матрицы. Среди решений равенств такого рода, представляющих $w = w(x, t)$, необходимо выбрать такое, при котором H_0 минимально. Если следующий по порядку малости минор порядка $k_1 - 1$ отличен от нуля, то для $p\sigma_1$ $(\sigma_1 = \overline{1, k_1 - 1})$ применима схема первого случая.

При отсутствии дискретных управлений нет необходимости строить области R_{ml} и вычисления существенно упрощаются. Изложенный прием имеет целью избежать трудности, связанные с нахождением решения $w = w(x, p, t)$, доставляющего максимум H_0 из (1.9) согласно обычной схеме вычислений. Нетрудно заметить, что приведенные рассуждения легко распространяются на краевые условия, отличные от рассмотренного типа, тогда как условия (1.5) можно трактовать как связи при нахождении максимума функции H_0 методом неопределенных множителей Лагранжа относительно управлений u_0, w и применять рассмотренный прием исключения некоторой серии импульсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Valentine A., The problem of Lagrange with differential iregularities as side conditions, Dissertation, University of Chicago, 1937.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961, с. 76—80, 23—28.
3. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 16, № 1, 3—12 (1967).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18/VII 1966

I. KEIS

VALENTINE'I MEETODI KASUTAMISEST MAKSIMUMPRINTSIIBI ÜLESANNETE LAHENDAMISEL

Osa impulssidest on väljendatud Pontrjagini funktsiooni maksimiseerimistingimustest ja uued koordinaadid ning juhtimised esitatakse funktsionaali konditsionaalmiinimumi leidmiseks.

I. KEIS

ON APPLICATION OF VALENTINE'S METHOD FOR SOLVING THE MAXIMUM PRINCIPLE'S PROBLEMS

Expressing impulses from the conditions necessary for the minimization of Pontryagin's function and introducing come new phase-coordinates and regulations the question of solving maximum principle's problems when subjected to various constraints is reduced to the proper non-linear differential equations with special terminal conditions.