EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.2.06

В. ПОЛЛЬ

О СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ НАХОЖДЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье [1] были обобщены методы И. Шмидта [2] нахождения стационарных точек функций одного переменного на функции нескольких переменных. Было доказано, что при обобщении порядки сходимости методов остались равными порядкам сходимости соответствующих методов И. Шмидта.

В данной работе доказываются теоремы сходимости методов, приведенных в статье [1]. Эти теоремы являются вместе с тем и теоремами существования стационарной точки для данного класса функций, и из них можно получить более точные оценки погрешности обобщенных методов по сравнению с оценками, приведенными в [1]. Метод доказательства соответствующих теорем аналогичен методу доказательства теорем И. Шмидта с несущественными изменениями.

1. Пусть G — класс функций

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{1}$$

для которых при любых $x', x'', x''', x^{\mathrm{IV}}$, принадлежащих к некоторой замкнутой сфере $S \subset m_n$, определены разделенные разности [1] $F_1(x'; x'')$, $F_{11}(x'; x''; x''')$, $F_{12}(x'; x''; x''')$ и выполнены следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\|F_{11}(x'; x''; x''')-F_{11}(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})\| \leqslant a\|x'-x''\|+ \\ +b\|x''-x'''\|+c\|x'''-x^{\mathrm{IV}}\| \\ \|F_{12}(x'; x''; x''')-F_{12}(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})\| \leqslant d\|x'-x''\|+ \\ +e\|x''-x'''\|+f\|x'''-x^{\mathrm{IV}}\|,\end{gathered} \tag{2}$$

где a, b, c, d, e, f — неотрицательные числа.

Рассмотрим на G приведенные в статье [1] методы нахождения стационарных точек функций

$$x^{(n+1)}=x^{(n)}-[F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2}+F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2}]^{-1}\,[F_{1}^{n,\,n-1}+F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2}\,(x^{(n)}-x^{(n-1)})] \tag{3}$$

$$\begin{gathered}x^{(n+1)}=x^{(n)}-[F_{11}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)})+F_{12}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)})]^{-1}\times \\ \times[F_1(x^{(n)}; y^{(n)})+F_{12}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)})\,(x^{(n)}-y^{(n)})],\end{gathered} \tag{4}$$

где $y^{(n)}=\alpha x^{(n)}+(1-\alpha)x^{(n-1)}, \quad (0<\alpha<1)$.

2. Рассмотрим числовые последовательности, встречающиеся позже в доказательствах теорем 1 и 3.

В теореме 1 встречаются следующие последовательности:

а) $\{\sigma_n\}$:

$$\sigma_3 = \frac{\eta\sigma_2}{1-\sigma_2}\ (\eta > 0); \quad \sigma_4 = \frac{\sigma_3}{1-\sigma_3}; \quad \sigma_5 = \frac{\sigma_4}{1-\sigma_4}\,\frac{\sigma_2}{1-\sigma_2}$$

$$\sigma_6 = \frac{\sigma_5}{1-\sigma_5}; \quad \sigma_n = \frac{2}{1-\sigma_{n-1}}\,\frac{\sigma_{n-2}}{1-\sigma_{n-2}}\,\frac{\sigma_{n-3}}{1-\sigma_{n-3}}, \quad (n \geqslant 7); \tag{5}$$

б) $\{\varrho_n\}$:

$$\varrho_3 = \varrho_4 = 2\frac{\sigma_2}{1-\sigma_2}\varrho_2; \quad \varrho_n = 2\frac{\sigma_{n-1}}{1-\sigma_{n-1}}\varrho_{n-2}, \quad (n \geqslant 5). \tag{6}$$

Последовательность $\{\varrho_n\}$ можно записать еще в следующем виде:

$$\varrho_{2n} = 2^{n-2}\varrho_3 \prod_{\nu=3}^{n} \frac{\sigma_{2\nu-1}}{1-\sigma_{2\nu-1}}$$

$$\varrho_{2n-1} = 2^{n-2}\varrho_3 \prod_{\nu=3}^{n} \frac{\sigma_{2\nu-2}}{1-\sigma_{2\nu-2}}, \quad (n \geqslant 2); \tag{7}$$

в) $\{\tau_n\}$:

$$\tau_n = \frac{\tau_{n-1}}{1-\sigma_{n-1}}, \quad (n \geqslant 3). \tag{8}$$

Величина σ_2 должна быть такой, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} &1)\ 0 < \sigma_i < 1 && (i = 2, \ldots, 6) \\ &2)\ \sigma_i \leqslant \sigma_{i-1} && (i = 7, 8, \ldots) \\ &3)\ \varrho_i \leqslant \varrho_{i-1} && (i = 3, 4, \ldots). \end{aligned} \tag{9}$$

Нетрудно показать, что условия (9) выполняются, если

$$0 < \sigma_2 \leqslant \sigma^*, \tag{10}$$

где σ^* — наименьший положительный корень уравнения

$$(1 + 6\eta + 4\eta^2)\sigma^3 + (1 + 8\eta + 8\eta^2)\sigma^2 - (3 + 6\eta)\sigma + 1 = 0. \tag{11}$$

Например,

$$\sigma^* \simeq \begin{cases} 0{,}18, & \text{если } \eta = 1 \\ 0{,}1, & \text{если } \eta = 2. \end{cases}$$

Учитывая неравенства (9), легко получить для последовательности $\{\varrho_n\}$ следующую оценку:

$$\varrho_{2n},\ \varrho_{2n-1} \leqslant \varrho_3\left(\frac{2\sigma_4}{1-\sigma_4}\right)^{n-2}. \tag{12}$$

В теореме 3 встречаются последовательности $\{\sigma'_n\}$, $\{\varrho'_n\}$ и $\{\tau'_n\}$. Эти последовательности отличаются от соответствующих последовательностей, приведенных в статье [2], только коэффициентами: вместо $\frac{3-\alpha}{2}$ следует положить $2-\alpha$.

Если учитывать все ограничения, налагаемые в теореме 3 на последовательности $\{\sigma'_n\}$ и $\{\varrho'_n\}$, то получим для σ'_2 оценку

$$0 < \sigma_2 \leqslant \sigma^{**}, \tag{13}$$

где σ^{**} — наименьший положительный корень уравнения

$$(22\alpha-5)\sigma^4-(14\alpha+48)\sigma^3+(2\alpha+44)\sigma^2-12\sigma+1=0 \tag{14}$$

(если $\alpha=0$, то $\sigma^{**}\simeq 0{,}16$).

Замечание 1. Оценки (10) и (13) можно несколько улучшить. Но уравнения для определения допустимых верхних границ для σ_2 и σ'_2 будут иметь громоздкий вид и более высокую степень, чем уравнения (11) и (14).

3. Рассмотрим метод (3). Пусть $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}$ — начальные приближения для метода (3).

Обозначим

$$\varrho_2=\frac{1}{2}\max\{\|x^{(3)}-x^{(2)}\|,\ \|x^{(3)}-x^{(1)}\|\}; \tag{15}$$

$$K_1=a+d;\quad K_2=b+e;\quad K_3=c+f;$$

$$\gamma=\max\left\{\frac{2}{\eta^2}\sigma_3K_1+\frac{2}{\eta}K_2+\frac{\|x^{(2)}-x^{(1)}\|}{\eta\varrho_2}K_3;\right.$$

$$\left.\frac{2}{\eta^2}\sigma_3(K_1+K_2)+\frac{2}{\eta^2}(1-2\sigma_3)K_3;\quad \frac{2}{\eta}(K_1+K_2+K_3)\right\}$$

и пусть

$$S=S[x^{(3)};\ \max\{r\varrho_3;\ \|x^{(3)}-x^{(i)}\|_{i=0,1,2}\}]^{*}, \tag{16}$$

где
$$r=\frac{2(1-\sigma_4)}{1-3\sigma_4}.$$

Теорема 1. *Пусть*

1° $\|(F_{11}^{2,1,0}+F_{12}^{2,1,0})^{-1}\|\leqslant\tau_2$;

2° а) $\sigma_2=\tau_2(K_1\|x^{(3)}-x^{(2)}\|+K_2\|x^{(2)}-x^{(1)}\|+K_3\|x^{(1)}-x^{(0)}\|)\leqslant\sigma^*$,

где σ^* — *наименьший положительный корень уравнения* (11);

б) $\|x^{(3)}-x^{(2)}\|+\varrho_3\leqslant\frac{2}{\eta}(1-\sigma_3)\varrho_2$;

в) $\gamma\varrho_2\leqslant\frac{\sigma_2}{\tau_2}$;

3° *для любых* $x', x'', x''', x^{IV}\in S$ *выполнены оценки* (2).

---

* Через $S[a;r]$ обозначается сфера $\|x-a\|\leqslant r$.

Тогда функция (1) *имеет в сфере* S *стационарную точку* x^*, *к которой последовательность* (3) *сходится со скоростью*

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leqslant r\varrho_n, \quad (n=3,\ 4,\ \ldots). \tag{17}$$

Доказательство. Сперва установим, что имеют место следующие соотношения для $n \geqslant 3$:

1) существует $(F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} + F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2})^{-1}$, следовательно, $x^{(n+1)}$ может быть однозначно определена из выражения (3), и

$$t_n := \|(F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} + F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2})^{-1}\| \leqslant \frac{t_{n-1}}{1-\sigma_{n-1}} \leqslant \tau_n;$$

2) $\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| \leqslant \varrho_n$;

3) $$s_n := \tau_n (K_1 \|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| + K_2 \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| + \\ + K_3 \|x^{(n-1)} - x^{(n-2)}\|) \leqslant (K_1 + K_2 + K_3)\tau_n \varrho_{n-2} \leqslant \sigma_n;$$

4) $x^{(n+1)} \in S$.

Доказательство соотношений 1), 2), 3) и 4) проведем индуктивно. Докажем сначала, что они имеют место для $n \geqslant 7$, поскольку начиная с этого номера доказательство проводится единым образом. После этого докажем справедливость вышеприведенных соотношений для $n = 3, 4, 5, 6$.

Пусть 1), 2), 3), 4) справедливы для индексов $\leqslant n-1$. Докажем их справедливость для n ($\geqslant 7$).

Для $x^{(n)}, x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, x^{(n-3)}$ существует матрица:

$$G_n = E - (F_{11}^{n-1,\,n-2,\,n-3} + F_{12}^{n-1,\,n-2,\,n-3})^{-1}(F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} + F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2}) = \\ = (F_{11}^{n-1,\,n-2,\,n-3} + F_{12}^{n-1,\,n-2,\,n-3})^{-1}(F_{11}^{n-1,\,n-2,\,n-3} + F_{12}^{n-1,\,n-2,\,n-3} - \\ - F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} - F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2}),$$

причем в силу (2)

$$\|G_n\| \leqslant \tau_{n-1}(\|F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} - F_{11}^{n-1,\,n-2,\,n-3}\| + \|F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2} - F_{12}^{n-1,\,n-2,\,n-3}\|) \leqslant \\ \leqslant \tau_{n-1}(K_1\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| + K_2\|x^{(n-1)} - x^{(n-2)}\| + K_3\|x^{(n-2)} - x^{(n-3)}\|) = \\ = s_{n-1} \leqslant \sigma_{n-1} < 1.$$

Так как $\|G_n\| < 1$, то по теореме Банаха о линейном ограниченном операторе существует обратная матрица

$$(E - G_n)^{-1} = (F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} + F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2})^{-1}(F_{11}^{n-1,\,n-2,\,n-3} + F_{12}^{n-1,\,n-2,\,n-3}),$$

откуда следует существование $(F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} + F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2})^{-1}$. Следовательно, $x^{(n+1)}$ определяется однозначно из (3).

Из теоремы Банаха следует также, что

$$t_n = \| (F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} + F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2})^{-1} \| = \| (E - G_n)^{-1} \times$$

$$\times (F_{11}^{n-1,\,n-2,\,n-3} + F_{12}^{n-1,\,n-2,\,n-3})^{-1} \| \leqslant \frac{t_{n-1}}{1-\sigma_{n-1}} \leqslant \frac{\tau_{n-1}}{1-\sigma_{n-1}} = \tau_n.$$

Далее имеет место

$$x^{(n+1)} - x^{(n)} = -(F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} + F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2})^{-1} [(F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} - F_{11}^{n-1,\,n-2,\,n-3}) \times$$

$$\times (x^{(n)} - x^{(n-1)}) + (F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2} - F_{12}^{n-1,\,n-2,\,n-3})(x^{(n)} - x^{(n-2)})].$$

Имея в виду 2°, 3° и равенство (8), получим

$$\begin{aligned}
\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| &\leqslant \tau_n [\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| \, (a\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| + \\
&+ b\|x^{(n-1)} - x^{(n-2)}\| + c\|x^{(n-2)} - x^{(n-3)}\|) + \\
&+ \|x^{(n)} - x^{(n-2)}\| \, (d\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| + \\
&+ e\|x^{(n-1)} - x^{(n-2)}\| + f\|x^{(n-2)} - x^{(n-3)}\|)] \leqslant \qquad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \tau_n [\varrho_{n-1} (a\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| + b\|x^{(n-1)} - x^{(n-2)}\| + c\|x^{(n-2)} - x^{(n-3)}\|) + \\
&\quad + (\varrho_{n-1} + \varrho_{n-2}) (d\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| + \\
&\quad + e\|x^{(n-1)} - x^{(n-2)}\| + f\|x^{(n-2)} - x^{(n-3)}\|)] \leqslant \\
&\quad \leqslant 2\frac{\tau_{n-1}}{1-\sigma_{n-1}} (K_1\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| + K_2\|x^{(n-1)} - x^{(n-2)}\| + \\
&\quad + K_3\|x^{(n-2)} - x^{(n-3)}\|)\, \varrho_{n-2} \leqslant 2\frac{\sigma_{n-1}}{1-\sigma_{n-1}} \varrho_{n-2} = \varrho_n.
\end{aligned}$$

Теперь установим соотношения 3) и 4). В силу (6), (8) и 2° имеем:

$$s_n \leqslant \tau_n (K_1 \varrho_n + K_2 \varrho_{n-1} + K_3 \varrho_{n-2}) \leqslant \tau_n (K_1 + K_2 + K_3)\, \varrho_{n-2} =$$

$$= \frac{2\tau_{n-2}(K_1 + K_2 + K_3)\,\sigma_{n-3}\,\varrho_{n-4}}{(1-\sigma_{n-1})(1-\sigma_{n-2})(1-\sigma_{n-3})} \leqslant \frac{2}{1-\sigma_{n-1}} \frac{\sigma_{n-2}}{1-\sigma_{n-2}} \frac{\sigma_{n-3}}{1-\sigma_{n-3}} = \sigma_n$$

и, учитывая (12) и (16), получим

$$\|x^{(n+1)} - x^{(3)}\| \leqslant \varrho_n + \varrho_{n-1} + \ldots + \varrho_3 \leqslant$$

$$\leqslant 2\varrho_3 \left[1 + \frac{2\sigma_4}{1-\sigma_4} + \ldots + \left(\frac{2\sigma_4}{1-\sigma_4}\right)^{\frac{n}{2}-2}\right] \leqslant \frac{2(1-\sigma_4)}{1-3\sigma_4} \varrho_3 = r\varrho_3,$$

следовательно, $x^{(n+1)} \in S$.

Далее докажем справедливость 1), 2), 3) и 4) для $n=3, 4, 5, 6$. Доказательство 1) и 4) не требует дополнительных рассуждений, но для доказательства 2) и 3) привлекаются условия 2°б) и в). А именно

$$\|x^{(4)}-x^{(3)}\| \leqslant \tau_3 [\|x^{(3)}-x^{(2)}\| (a\|x^{(3)}-x^{(2)}\| + b\|x^{(2)}-x^{(1)}\| + c\|x^{(1)}-x^{(0)}\|) + \|x^{(3)}-x^{(1)}\| (d\|x^{(3)}-x^{(2)}\| + e\|x^{(2)}-x^{(1)}\| + f\|x^{(1)}-x^{(0)}\|)] \leqslant 2\tau_3 (K_1\|x^{(3)}-x^{(2)}\| + K_2\|x^{(2)}-x^{(1)}\| + K_3\|x^{(1)}-x^{(0)}\|)\varrho_2 \leqslant 2\frac{\sigma_2}{1-\sigma_2}\varrho_2 = \varrho_3;$$

$$s_3 \leqslant \tau_3 (K_1\varrho_3 + 2K_2\varrho_2 + K_3\|x^{(2)}-x^{(1)}\|) \leqslant \leqslant \eta\tau_3 \left(\frac{2}{\eta^2}\sigma_3 K_1 + \frac{2}{\eta} K_2 + \frac{\|x^{(2)}-x^{(1)}\|}{\eta\varrho_2}\right)\varrho_2 \leqslant \frac{\eta\tau_2\gamma\varrho_2}{1-\sigma_2} \leqslant \frac{\eta\sigma_2}{1-\sigma_2} = \sigma_3;$$

$$\|x^{(5)}-x^{(4)}\| \leqslant \tau_4[\varrho_3 (a\|x^{(4)}-x^{(3)}\| + b\|x^{(3)}-x^{(2)}\| + c\|x^{(2)}-x^{(1)}\|) + (\|x^{(3)}-x^{(2)}\| + \varrho_3)(d\|x^{(4)}-x^{(3)}\| + e\|x^{(3)}-x^{(2)}\| + f\|x^{(2)}-x^{(1)}\|)] \leqslant$$
$$\leqslant \tau_4[(\|x^{(3)}-x^{(2)}\| + \varrho_3)(K_1\|x^{(4)}-x^{(3)}\| + K_2\|x^{(3)}-x^{(2)}\| + K_3\|x^{(2)}-x^{(1)}\|] \leqslant \frac{\tau_3}{1-\sigma_3}\,\frac{2}{\eta}\,(1-\sigma_3)\varrho_2 \times$$
$$\times (K_1\|x^{(4)}-x^{(3)}\| + K_2\|x^{(3)}-x^{(2)}\| + K_3\|x^{(2)}-x^{(1)}\|) \leqslant \frac{2}{\eta}\,\sigma_3\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4;$$

$$s_4 \leqslant \tau_4 (K_1\varrho_4 + K_2\varrho_3 + K_3\,\frac{2}{\eta}\,(1-2\sigma_3)\varrho_2) =$$
$$= \frac{\eta\tau_3}{1-\sigma_3}\left[\frac{2}{\eta^2}\sigma_3 (K_1+K_2) + \frac{2}{\eta^2}(1-2\sigma_3)K_3\right]\varrho_2 \leqslant \frac{\eta\tau_3\gamma\varrho_2}{1-\sigma_3} \leqslant \frac{\sigma_3}{1-\sigma_3} = \sigma_4;$$

$\|x^{(6)}-x^{(5)}\| \leqslant 2\,\frac{\sigma_4}{1-\sigma_4}\,\varrho_3 = \varrho_5$ (доказательство аналогично доказательству (18));

$$s_5 \leqslant \tau_5 (2K_1\,\frac{\sigma_4}{1-\sigma_4}\,\varrho_3 + K_2\varrho_4 + K_3\varrho_3) =$$
$$= \eta\tau_5\,\left(\frac{2}{\eta}\,\frac{\sigma_4}{1-\sigma_4}\,K_1 + \frac{2}{\eta}\,K_2 + \frac{2}{\eta}\,K_3\right)\varrho_2\,\frac{\sigma_3}{\eta} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\eta\tau_4\gamma\varrho_2\sigma_3}{(1-\sigma_4)\eta} \leqslant \frac{\sigma_4}{1-\sigma_4}\,\frac{\sigma_2}{1-\sigma_2} = \sigma_5;$$

$\|x^{(7)}-x^{(6)}\| \leqslant 2\,\frac{\sigma_5}{1-\sigma_5}\,\varrho_4 = \varrho_6$ (доказательство аналогично доказательству (18));

$$s_6 \leqslant \tau_6 (K_1 \varrho_6 + K_2 \varrho_5 + K_3 \varrho_4) \leqslant \tau_6 \left(\frac{2}{\eta} K_1 + \frac{2}{\eta} K_2 + \frac{2}{\eta} K_3\right) \sigma_3 \varrho_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta \tau_5 \gamma \varrho_2 \sigma_3}{(1-\sigma_5)\eta} \leqslant \frac{\sigma_5}{1-\sigma_5} = \sigma_6.$$

Далее из 2) и (12) следует, что (при $m > n$)

$$\|x^{(n+m)} - x^{(n)}\| \leqslant \varrho_{n+m-1} + \ldots + \varrho_n \leqslant 2\varrho_n \left(1 + 2\frac{\sigma_4}{1-\sigma_4} + \ldots\right) = r\varrho_n \tag{19}$$

и, следовательно, последовательность $\{x^{(n)}\}$ в силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n = 0$, удовлетворяет условию Коши. Ее предел x^*, как легко видеть при предельном переходе $(m \to \infty)$ в (19), удовлетворяет неравенству (17). В частности, $x^* \in S$.

Осталось показать, что x^* является стационарной точкой для функции (1), т. е. что x^* удовлетворяет уравнению $f'(x) = 0$.

Имеет место неравенство

$$\|f'(x^*)\| = \|F_1(x^*; x^*)\| = \|F_1(x^*; x^*) - (F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} +$$

$$+ F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) - F_1^{n,\,n-1} - F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2}(x^{(n)} - x^{(n-1)})\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_{11}(x^{(n)}; x^*; x^*)\| \, \|x^* - x^{(n)}\| + \|F_{12}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^*)\| \, \|x^* - x^{(n-1)}\| +$$

$$+ \|F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2}\| \, \|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| + \|F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2}\| \, \|x^{(n+1)} - x^{(n-1)}\|. \tag{20}$$

Так как для любых аргументов $x', x'', x''' \in S$ имеет место неравенство

$$\|F_{1s}(x'; x''; x''')\| \leqslant \|F_{1s}(x^*; x^*; x^*)\| + \max(a; d)\|x^* - x'\| +$$

$$+ \max(b; e)\|x^* - x''\| + \max(c; f)\|x^* - x'''\| \qquad (s = 1, 2),$$

то, переходя к пределу $(n \to \infty)$ в (20), получим $f'(x^*) = 0$.

Теорема доказана.

Теперь докажем для метода (3) теорему сходимости при более жестких условиях. А именно, предположим, что обратная матрица $(F_{11} + F_{12})^{-1}$ существует и ограничена, т. е.

$$\|[F_{11}(x'; x''; x''') + F_{12}(x'; x''; x''')]^{-1}\| \leqslant p \tag{21}$$

для любых x', x'', x''', принадлежащих к сфере

$$S\left[x^{(3)}; \max\left\{\frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|}{1-h}; \ \|x^{(1)} - x^{(0)}\|\right\}\right],$$

где

$$h = 2p\,[(K_1 + K_2)\|x^{(2)} - x^{(1)}\| + K_3\|x^{(1)} - x^{(0)}\|].$$

Теорема 2. *Пусть*

1° $\|x^{(3)} - x^{(2)}\| \leqslant \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \leqslant \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$;

2° *для любых* $x', x'', x''', x^{\mathrm{IV}} \in S$ *имеют место* (21) и (2);

3° $h < 1$.

Тогда функция (1) *имеет в сфере* S *стационарную точку* x^*, *к которой последовательность* (3) *сходится со скоростью*

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leqslant \frac{h^{\mu_n}}{1-h} \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \qquad (n = 3, 4, \ldots), \tag{22}$$

где

$$\mu_n = \mu_{n-2} + \mu_{n-3} + 1, \quad \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0.$$

Доказательство. Докажем, что для всех индексов ($n \geqslant 3$) справедливы следующие соотношения:

1) $r_n = \|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| \leqslant h^{\mu_n} r_1 \leqslant h^{n-3} r_1$;

2) $x^{(n+1)} \in S$.

Справедливость 1) и 2) для $n = 3, 4, 5$ легко проверить. Докажем, что и для $n \geqslant 6$ 1) и 2) справедливы:

$$r_n = \|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| \leqslant p[r_{n-1}(ar_{n-1} + br_{n-2} + cr_{n-3}) +$$

$$+ \|x^{(n)} - x^{(n-2)}\| \, (dr_{n-1} + er_{n-2} + fr_{n-3})] \leqslant 2p\, h^{\mu_{n-2}} r_1 (K_1 h^{\mu_{n-1}} r_1 +$$

$$+ K_2 h^{\mu_{n-2}} r_1 + K_3 h^{\mu_{n-3}} r_1) \leqslant 2p[(K_1 + K_2) r_1 + K_3 r_0] \times$$

$$\times h^{\mu_{n-2} + \mu_{n-3}} r_1 = h^{\mu_{n-2} + \mu_{n-3} + 1} r_1 = h^{\mu_n} r_1;$$

$\|x^{(n+1)} - x^{(3)}\| \leqslant r_n + \ldots + r_3 \leqslant (h^{n-3} + \ldots + 1) r_1 \leqslant \frac{r_1}{1-h}$, следовательно, $x^{(n+1)} \in S$.

Так как

$$\|x^{(n+m)} - x^{(n)}\| \leqslant r_{n+m-1} + \ldots + r_n \leqslant \frac{h^{\mu_n} r_1}{1-h},$$

то последовательность $\{x^{(n)}\}$ является последовательностью Коши, предельный элемент которой удовлетворяет неравенству (22).

Доказательство того, что $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)}$ является стационарной точкой функции (1), проводится аналогично доказательству такого же утверждения в теореме 1.

Теорема доказана.

4. Аналогичные теоремы можно доказать и для метода (4).

Пусть $x^{(1)}, x^{(2)}$ являются начальными приближениями для метода (4).

Обозначим

$$\varrho' = \frac{1}{2-\alpha} \max\{\|x^{(3)} - x^{(2)}\|, \ \|x^{(2)} - y^{(2)}\|, \ \|y^{(3)} - x^{(2)}\|, \ \|x^{(3)} - y^{(2)}\|\};$$

$$K_1' = 2a + (2-\alpha)d; \quad K_2' = b + 2e; \quad K_3' = (2-\alpha)c + f;$$

$$\gamma' = \max\{(K_1' + K_2' + K_3'); \ (2-\alpha)[K_1' \sigma_3' + K_2' (\alpha\sigma_3' - \alpha + 1) + K_3']\}$$

и пусть

$$S = S[x^{(3)}; \ \max\{r'\varrho_3'; \ \|x^{(3)} - x^{(i)}\|_{i=1,2}\}],$$

где

$$r' = \frac{2(1-\sigma_4')}{1 - 3\sigma_4' + \alpha\sigma_4'}.$$

Теорема 3. *Пусть*

1° $\|[F_{11}(x^{(2)}; y^{(2)}; x^{(1)}) + F_{12}(x^{(2)}; y^{(2)}; x^{(1)})]^{-1}\| \leqslant \tau_2'$;

2° а) $\sigma_2' = \tau_2'[K_1'\|x^{(3)} - x^{(2)}\| + K_2'\|y^{(3)} - y^{(2)}\| + K_3'\|x^{(2)} - x^{(1)}\|] \leqslant \sigma^{**}$,

где σ^{**} *— наименьший положительный корень уравнения* (13);

б) $(1-\alpha)\|x^{(3)} - x^{(2)}\| + \varrho_3' \leqslant (2-\alpha)(1-\sigma_3')\varrho_2'$;

в) $\gamma'\varrho_2' \leqslant \frac{\sigma_2'}{\tau_2'}$;

3° *для любых* $x', x'', x''', x^{\mathrm{IV}} \in S$ *выполнены оценки* (2).

Тогда функция (1) *имеет в сфере* S *стационарную точку* x^*, *к которой последовательность* (4) *сходится со скоростью*

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leqslant r'\varrho_n' \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 (см. также [2]). Поэтому приведем только некоторые наиболее важные его моменты.

Оно основывается на следующих неравенствах, имеющих место для $x^{(n)}, y^{(n)}, x^{(n-1)}, y^{(n-1)}, x^{(n-2)} \in S$:

$$t_n' := \|[F_{11}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)}) + F_{12}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)})]^{-1}\| \leqslant \frac{t_{n-1}'}{1-\sigma_{n-1}'} \leqslant \tau_n'; \tag{23}$$

$$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| \leqslant (2-\alpha)\frac{\sigma_{n-1}'}{1-\sigma_{n-1}'}\varrho_{n-2}'. \tag{24}$$

При этом используется неравенство

$$s_n' := \tau_n'(K_1'\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| + K_2'\|y^{(n+1)} - y^{(n)}\| + K_3'\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|) \leqslant \leqslant \tau_n'(K_1' + K_2' + K_3')\varrho_{n-2}' \leqslant \sigma_n'. \tag{25}$$

(23) доказывается так же, как 1) в теореме 1, а (25) аналогично соответствующему неравенству в [2]. Докажем справедливость неравенства (24). Так как

$$x^{(n+1)} - x^{(n)} = -[F_{11}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)}) + F_{12}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)})]^{-1} \times$$
$$\times \{(x^{(n)} - x^{(n-1)})[F_{11}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)}) - F_{11}(x^{(n-1)}; y^{(n-1)}; x^{(n-2)})] -$$
$$- (y^{(n)} - x^{(n-1)})[F_{11}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)}) - F_{11}(x^{(n-1)}; y^{(n)}; y^{(n-1)})] +$$
$$+ (x^{(n)} - y^{(n-1)})[F_{12}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)}) - F_{12}(x^{(n-1)}; y^{(n-1)}; x^{(n-2)})] -$$
$$- (x^{(n-1)} - y^{(n-1)})[F_{12}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)}) - F_{12}(y^{(n)}; y^{(n-1)}; x^{(n-1)})]\},$$

то

$$\|x^{(n+1)}-x^{(n)}\| \leqslant \tau_n' [\varrho_{n-1}' (a\|x^{(n)}-x^{(n-1)}\| + b\,\|y^{(n)}-y^{(n-1)}\| +$$
$$+ c\|x^{(n-1)}-x^{(n-2)}\|) +$$
$$+ \alpha\varrho_{n-1}' (a\|x^{(n)}-x^{(n-1)}\| + (1-\alpha)c\|x^{(n-1)}-x^{(n-2)}\|) +$$
$$+ (2-\alpha)\varrho_{n-2}' (d\|x^{(n)}-x^{(n-1)}\| + e\|y^{(n)}-y^{(n-1)}\| + f\|x^{(n-1)}-x^{(n-2)}\|) +$$
$$+ (1-\alpha)\varrho_{n-2}' ((1-\alpha)d\|x^{(n)}-x^{(n-1)}\| + e\|y^{(n)}-y^{(n-1)}\|)] \leqslant$$
$$\leqslant \tau_n' (2-\alpha)\varrho_{n-2} (K_1' \|x^{(n)}-x^{(n-1)}\| + K_2' \|y^{(n)}-y^{(n-1)}\| +$$
$$+ K_3' \|x^{(n-1)}-x^{(n-2)}\|) \leqslant (2-\alpha)\,\frac{\sigma_{n-1}'}{1-\sigma_{n-1}'}\,\varrho_{n-2}'.$$

Замечание 2. Оценивать $\|x^{(n+1)}-x^{(n)}\|$ можно и другими способами, варьируя те первые разделенные разности, которые следует складывать и отнимать при преобразовании разности $F_1(x^{(n)};\ y^{(n)}) - F_1(x^{(n-1)};\ y^{(n-1)})$. При этом меняются и коэффициенты K_1', K_2', K_3' и выражение для ϱ_2'.

Сформулируем для метода (4) теорему, аналогичную теореме 2. Условие (21) предполагаем выполненным для любых x', x'', x''', принадлежащих к сфере

$$S\left[x^{(3)};\ \frac{\|x^{(2)}-x^{(1)}\|}{1-h}\right],$$

где

$$h = (2-\alpha)p\|x^{(2)}-x^{(1)}\|(K_1'+K_2'+K_3').$$

Теорема 4. *Пусть*

1° $\|x^{(3)}-x^{(2)}\| \leqslant \|x^{(2)}-x^{(1)}\|$;

2° *для любых* x', x'', x''', $x^{\mathrm{IV}} \in S$ *имеют место* (21) и (2);

3° $h<1$.

Тогда функция (1) *имеет в сфере* S *стационарную точку* x^*, *к которой последовательность* (4) *сходится со скоростью*

$$\|x^*-x^{(n)}\| \leqslant \frac{h^{\nu_n}}{1-h}\|x^{(2)}-x^{(1)}\| \qquad (n=3,\ 4,\ \ldots),$$

где

$$\nu_n = 2\nu_{n-2}+1, \quad \nu_1=\nu_2=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Полль В., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **16**, № 1 (1967).
2. Schmidt J. W., Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, **12**, Nr. 6, 1601 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
20/VI 1966

V. POLL

MÕNEDE MITME MUUTUJA FUNKTSIOONIDE STATSIONAARSETE PUNKTIDE LEIDMISE MEETODITE KOONDUVUSEST

Artiklis tõestatakse meetodite (3) ja (4) jaoks (vt. ka [1]) teatavas mitme muutuja funktsioonide klassis koonduvusteoreemid.

V. POLL

ON CONVERGENCE OF SOME METHODS FOR FINDING STATIONARY VALUES OF A FUNCTION OF SEVERAL VARIABLES

Convergence theorems of methods (3) and (4) published in paper [1] on a certain class of functions of several variables are given.