EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.2.05

С. УЛЬМ

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЯХ. II

В статье [1] были даны определения обобщенных разделенных разностей первого и второго порядков для нелинейных операторов в линейных пространствах. Были также приведены примеры симметричных разделенных разностей и построены несимметричные разделенные разности первого и второго порядков для функций нескольких переменных и для векторных функций с векторными аргументами. В настоящей статье рассматривается ряд дальнейших вопросов, связанных с обобщенными разделенными разностями и их применениями.

§ 1. Обобщенные разделенные разности и производные Фреше

Хорошо известно, что разделенную разность функции $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x'; x'') = \int_0^1 f'(x'' + t(x' - x''))\,dt. \tag{1.1}$$

Аналогичным образом можно определить разделенную разность и для оператора $F(x)$. Допустим, что оператор $F(x)$ имеет на отрезке $[x', x'']$ непрерывную производную в смысле Фреше. Тогда можно положить

$$F(x'; x'') = \int_0^1 F'[x'' + t(x' - x'')]\,dt, \tag{1.2}$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Легко видеть, что

$$F(x'; x'')(x' - x'') = F(x') - F(x''); \quad F(x'; x'') = F(x''; x');$$
$$F(x; x) = F'(x).$$

Пусть, например, $y = F(x)$ является оператором Фредгольма, т. е.

$$F(x(s)) = \int_a^b K(s, \tau, x(\tau))\,d\tau. \tag{1.3}$$

Если оператор (1.3) непрерывно дифференцируем в смысле Фреше, то по (1.2) получим

$$F(x'; x'')h = \int_0^1 \int_a^b K'_x(s, \tau, x''(\tau) + t(x'(\tau) - x''(\tau)))\,h(\tau)\,d\tau dt. \tag{1.4}$$

Легко видеть, что (1.4) можно выразить и следующим образом:

$$F(x';x'')h=\int_a^b[K(s,\tau,x'(\tau))-K(s,\tau,x''(\tau))][x'(\tau)-x''(\tau)]^{-1}h(\tau)\,d\tau, \quad (1.5)$$

т. е. мы можем разделенную разность вычислить через значения ядра $K(s,\tau,x(\tau))$.

Но в банаховых пространствах, являющихся прямыми произведениями более простых банаховых пространств, определение разделенной разности в виде (1.2) нецелесообразно, так как мы не можем выразить ее через значения оператора. Такой пример был приведен в статье [1].

Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — банаховые пространства. Образуем множество всевозможных векторов $x=(x_1,\ldots,x_n)$, где $x_1\in X_1,\ldots,x_n\in X_n$. Множество $X=\{x\}$ можно естественным образом линеаризировать и, если в нем определить норму, например

$$\|x\|=\|(x_1,\ldots,x_n)\|=\|x_1\|+\ldots+\|x_n\|, \quad (1.6)$$

то оно становится банаховым пространством. Пространство $X=X_1\times\ldots\times X_n$ называется прямым произведением пространств $X_1,\ldots,X_n$ (ср. [2], стр. 613).

В пространстве X целесообразно разделенную разность для оператора $F(x)$ определить в виде следующего оператора-вектора:

$$F(x';x'')=$$
$$=\left(\int_0^1 F'_{x_i}(x''_1,\ldots,x''_{i-1},x''_i+t(x'_i-x''_i),x'_{i+1},\ldots,x'_n)\,dt\right)_{i=1,\ldots,n,} \quad (1.7)$$

где

$$x'=(x'_1,\ldots,x'_n);\ x''=(x''_1,\ldots,x''_n);\ x',x''\in X;$$

F_{x_i} — частная производная по x_i от оператора $F(x)$ (ср. [2]).

При этом $F(x;x)=F'(x)$; $F(x';x'')(x'-x'')=F(x')-F(x'')$, но $F(x';x'')\neq F(x'';x')$.

Аналогичным образом можно определить и разделенные разности второго порядка (как операторы-матрицы):

$$F(x';x'';x''')_1=(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}},$$

где

$$a_{ij}=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\int_0^{t_1}F''_{x_ix_i}(x'''_1,\ldots,x'''_{i-1},x''_i+t_1(x''_i-x'''_i)+t_2(x'_i-x''_i),\\ \qquad\qquad x'_{i+1},\ldots,x'_n)\,dt_2dt_1, & \text{если } i=j;\\ \displaystyle\int_0^1\int_0^1F''_{x_ix_j}(x'''_1,\ldots,x'''_{j-1},x'''_j+t_1(x''_j-x'''_j),x''_{j+1},\ldots,x''_{i-1},\\ \quad x''_i+t_2(x'_i-x''_i),x'_{i+1},\ldots,x'_n)\,dt_2dt_1, & \text{если } j<i;\\ 0, & \text{если } j>i;\end{cases} \quad (1.8)$$

$$F(x'; x''; x''')_2 = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n,\\ j=1,\ldots,n}}$$

где

$$b_{ij} = \begin{cases} \int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1} F''_{x_ix_i}(x_1''', \ldots, x_{i-1}''', x_i''' + t_1(x_i'' - x_i''') + t_2(x_i' - x_i''), \\ \qquad\qquad x_{i+1}', \ldots, x_n')\, dt_2 dt_1, \quad \text{если } i = j; \\ \int\limits_0^1\int\limits_0^1 F''_{x_ix_j}(x_1''', \ldots, x_{i-1}''' x_i''' + t_1(x_i'' - x_i'''), x_{i+1}'', \ldots, x_{j-1}'', \\ \qquad\qquad x_j'' + t_2(x_j' - x_j''), x_{j+1}', \ldots, x_n')\, dt_2 dt_1, \quad \text{если } j > i; \\ 0, \quad \text{если } j < i. \end{cases} \tag{1.9}$$

Здесь

$$x''' = (x_1''', \ldots, x_n''') \in X;$$

$F_{x_ix_j}$ — частные производные второго порядка (по x_i, x_j) от оператора $F(x)$.

При этом $F(x'; x''; x''')_1 (x'' - x''') = F(x'; x'') - F(x'; x''')$;

$F(x'; x''; x''')_2 (x' - x'') = F(x'; x''') - F(x''; x''')$;

$F(x; x; x)_1 + F(x; x; x)_2 = F''(x)$.

Если $F(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция нескольких переменных, то производя в (1.7), (1.8) и (1.9) интегрирование, легко видеть, что выражения (1.7), (1.8) и (1.9) для обобщенных разделенных разностей совпадают с соответствующими выражениями, представленными в статье [1].

Отметим, что другие варианты обобщенных разделенных разностей получаются, если положить

$$F(x'; x'') = \\ = \left(\int\limits_0^1 F'_{x_i}(x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i' + t(x_i'' - x_i'), x_{i+1}'', \ldots, x_n'')\, dt \right)_{i=1,\ldots,n} \tag{1.10}$$

Очевидно, что и в этом случае $F(x; x) = F'(x)$; $F(x'; x'')(x' - x'') = F(x') - F(x'')$.

§ 2. Обобщенные интерполяционные формулы Ньютона для операторов и функционалов

Пусть $F(x)$ — нелинейный оператор, имеющий разделенные разности первого и второго порядков. Воспользуемся соотношениями [1]:

$$F(x'; x'')(x' - x'') = F(x') - F(x''); \tag{2.1}$$

$$F(x'; x''; x''')_1 (x'' - x''') = F(x'; x'') - F(x'; x'''); \tag{2.2}$$

$$F(x'; x''; x''')_2 (x' - x'') = F(x'; x''') - F(x''; x'''). \tag{2.3}$$

На основании этих соотношений легко доказать справедливость следующих интерполяционных формул Ньютона (ср. [3]):

$$F(x) = F(x') + F(x''; x')(x - x') + [F(x; x') - F(x''; x')](x - x') \quad (2.4)$$

или

$$F(x) = F(x') + F(x''; x')(x - x') + F(x; x''; x')_2 (x - x')(x - x''); \quad (2.4')$$

$$F(x) = F(x') + F(x'; x'')(x - x') + [F(x'; x) - F(x'; x'')](x - x') \quad (2.5)$$

или

$$F(x) = F(x') + F(x'; x'')(x - x') + F(x'; x''; x)_1 (x - x')(x - x''); \quad (2.5')$$

$$F(x) = F(x') + F(x'; x'')(x - x') + [F(x; x') - F(x'; x'')](x - x'). \quad (2.6)$$

Если существует разделенная разность $F(x; x'; x'')$, удовлетворяющая условию

$$F(x; x'; x'')(x - x'') = F(x; x') - F(x'; x''), \quad (2.7)$$

то формулу (2.6) можно представить в виде

$$F(x) = F(x') + F(x'; x'')(x - x') + F(x; x'; x'')(x - x')(x - x''). \quad (2.6')$$

Отметим, что в симметрическом случае формулы (2.4), (2.5) и (2.6) (соответственно (2.4′), (2.5′) и (2.6′)) совпадают

Дальше можно получить, например, формулы

$$F(x) = F(x') + F(x''; x')(x - x') + F(x'''; x''; x')_2 (x - x')(x - x'') + \\ + [F(x; x''; x')_2 - F(x'''; x''; x')_2](x - x')(x - x'') \quad (2.8)$$

$$F(x) = F(x') + F(x'; x'')(x - x') + F(x'; x''; x''')_1 (x - x')(x - x'') + \\ + [F(x'; x''; x)_1 - F(x'; x''; x''')_1](x - x')(x - x''). \quad (2.9)$$

В симметрическом случае формулы (2.8) и (2.9) совпадают и их можно представить в виде

$$F(x) = F(x') + F(x'; x'')(x - x') + F(x'; x''; x''')(x - x')(x - x'') + \\ + [F(x; x'; x'') - F(x'; x''; x''')](x - x')(x - x''). \quad (2.10)$$

В качестве примера докажем формулу (2.5). На основании (2.2) получим

$$F(x'; x) = F(x'; x'') + F(x'; x''; x)_1 (x - x''). \quad (2.11)$$

Умножая обе части (2.11) на $x - x'$ и рассчитывая симметричность билинейного оператора $F(x'; x''; x)_1$ и (2.1), получим

$$F(x) = F(x') + F(x'; x'')(x - x') + F(x'; x''; x)_1 (x - x')(x - x'').$$

Из формулы (2.5) легко следует формула (2.9).

Если $F(x)$ является функционалом, то, используя понятие разностного градиента функционала [1], получим аналогичные формулы, например:

$$F(x) = F(x') + (F(x''; x'), x - x') + (F(x; x''; x')_2(x - x''), x - x') \quad (2.12)$$

$$F(x) = F(x') + (F(x'; x''), x - x') + (F(x'; x''; x)_1(x - x''), x - x') \quad (2.13)$$

$$F(x) = F(x') + (F(x''; x'), x - x') + (F(x'''; x''; x')_2(x - x''), x - x') + \\ + ([F(x; x''; x')_2 - F(x'''; x''; x')_2](x - x''), x - x') \quad (2.14)$$

$$F(x) = F(x') + (F(x'; x''), x - x') + (F(x'; x''; x''')_1(x - x''), x - x') + \\ + ([F(x'; x''; x)_1 - F(x'; x''; x''')_1](x - x''), x - x'). \quad (2.15)$$

Для $\operatorname{grad} f(x) = F(x; x)$ получается (ср. [1, 4]) следующее разложение:

$$F(x; x) = F(x'; x'') + F(x'; x''; x''')_1(x - x'') + F(x'; x''; x''')_2(x - x') + \\ + [F(x'; x''; x)_1 - F(x'; x''; x''')_1](x - x'') + \quad (2.16) \\ + [F(x'; x; x)_2 - F(x'; x''; x''')_2](x - x').$$

Приведенные формулы можно использовать для построения различных алгоритмов для решения нелинейных уравнений и нахождения стационарных точек функционалов.

§ 3. Замечания к итерационным методам с разделенными разностями второго порядка

В работах [5, 6] на основании формулы (2.10) были построены итерационные методы с разделенными разностями второго порядка для решения уравнения $F(x) = 0$. Так как в пространствах, элементами которых являются, например, векторы или вектор-функции, удобно построить несимметричные разделенные разности $F(x'; x''; x''')_1$ и $F(x'; x''; x''')_2$, то вышеупомянутые методы нужно модифицировать и для таких случаев.

Рассмотрим, например, методы, построенные в статье [5]. В модифицированных случаях эти итерационные методы, получаемые на основании формул (2.8) и (2.9), имеют тот же вид, что в статье [5]:

$$x_{n+1} = x_n + [E - \alpha U_n(\bar{x}_{n+1} - x_n)]^{-1} \times \\ \times [E - (1 + \alpha) U_n(\bar{x}_{n+1} - x_n) - U_n(x_n - x_{n-1})](\bar{x}_{n+1} - x_n). \quad (3.1)$$

Разница заключается только в том, что U_n и $\bar{x}_{n+1} - x_n$ имеют здесь следующий смысл:

1) $U_n = [F(x_{n-1}; x_n)]^{-1} F(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)_2$
$\bar{x}_{n+1} - x_n = -[F(x_{n-1}; x_n)]^{-1} F(x_n)$ (3.2)

или

2) $U_n = [F(x_n; x_{n-1})]^{-1} F(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})_1$
$\bar{x}_{n+1} - x_n = -[F(x_n; x_{n-1})]^{-1} F(x_n).$ (3.3)

Приведем теорему сходимости для методов (3.1) — (3.2) (ср. [5]).

Теорема. *Пусть*

1° *уравнение* $F(x)=0$ *имеет решение* x^*, *причем*

$$\max\{\|x^*-x_0\|;\ \|x^*-x_1\|;\ \|x^*-x_2\|\}\leqslant d;$$

2° *для каждого* x', x'', x''', x^{IV} из сферы $\|x-x^*\|\leqslant d$ *справедливы оценки*:

а) $\|[F(x';x'')]^{-1}\|\leqslant B$

б) $\|F(x';x'';x''')_2\|\leqslant H$

в) $\|F(x';x''';x^{\mathrm{IV}})_2-F(x'';x''';x^{\mathrm{IV}})_2\|\leqslant K\|x'-x''\|$;

3° $|\alpha|BHd+[BK+(1+|\alpha|+|1+\alpha|)B^2H^2]d^2+|1+\alpha|B^3H^3d^3<1.$

Тогда последовательность (3.1)—(3.2) *сходится к решению уравнения* $F(x)=0$ *со скоростью*

$$\|x^*-x_n\|\leqslant M^{-1}(Md)^{t_n}\qquad (n=0,\ 1,\ \ldots),$$

где

$$M=[1-|\alpha|BHd(1+BHd)]^{-1/2}\,[BK+B^2H^2+|1+\alpha|B^2H^2(1+BHd)]^{1/2}$$

и числа t_n *являются обобщенными числами Фибоначчи*

$$(t_0=t_1=t_2=1;\qquad t_{n+1}=t_n+t_{n-1}+t_{n-2};\qquad n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Аналогичная теорема получается для методов (3.1)—(3.3).

§ 4. Решение задач оптимального управления обобщенным методом И. В. Шмидта

На основании формулы (2.16) в [4] был построен и исследован следующий метод для нахождения стационарных точек функций нескольких переменных:

$$\begin{aligned}x_{n+1}=x_n-[F(x_n;x_{n-1};x_{n-2})_1+F(x_n;x_{n-1};x_{n-2})_2]^{-1}\times\\ \times[F(x_n;x_{n-1})+F(x_n;x_{n-1};x_{n-2})_1(x_n-x_{n-1})].\end{aligned}\tag{4.1}$$

Порядок сходимости метода $\approx 1{,}32$. Если заменить x_{n-2} на $\alpha x_n+(1-\alpha)x_{n-1}$ $(0<\alpha<1)$ или на $x_n-\varepsilon_nF(x_n;x_{n-1})$, получим метод с порядком сходимости $\sqrt{2}$.

Метод (4.1) можно также рассматривать как обобщение метода И. В. Шмидта [7] для случая функционалов с несимметрическими разделенными разностями.

Рассмотрим применение метода (4.1) для приближенного решения следующей проблемы оптимального управления:

минимизировать по u функционал

$$I=\int_0^T G(x(t),u(t),t)\,dt+F(x(T))\tag{4.2}$$

при условиях

$$\begin{cases}dx/dt=f(x,u,t),\\ x(0)=c.\end{cases}\tag{4.3}$$

Допустим, что время T фиксировано. Здесь $x=(x_1, \ldots, x_n)$; $u=(u_1, \ldots, u_m)$; $c=(c_1, \ldots, c_n)$; $f=(f_1, \ldots, f_n)$; G, F — скалярные функции. Обозначим еще $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$; $z=(x, u, \lambda)$.

Построим лагранжиан*

$$L(z)=F(x(T))+\int_0^T \{G(x(t), u(t), t)+(\lambda(t), f(x, u, t)-\dot{x})\}dt. \qquad (4.4)$$

Пусть $z'=(x', u', \lambda')$; $z''=(x'', u'', \lambda'')$. Тогда

$$L(z')-L(z'')=F(x'(T))-F(x''(T))+\int_0^T \{G(x', u', t)-G(x'', u'', t)+$$
$$+(\lambda', f(x', u', t)-\dot{x}')-(\lambda'', f(x'', u'', t)-\dot{x}'')\}dt=$$
$$=(F(x'(T); x''(T)), x'(T)-x''(T))+\int_0^T \{(G(x', x''; u', t), x'-x'')+$$
$$+(G(x''; u'u''; t), u'-u'')+(\lambda', f(x'x''; u', t)(x'-x''))+$$
$$+(\lambda', f(x''; u'u''; t)(u'-u''))-(\lambda', \dot{x}'-\dot{x}'')+(\lambda'-\lambda'', f(x'', u'', t)-\dot{x}'')\}dt.$$

Здесь введены обозначения (ср. [1]):

$$F(x'; x'')=(F(x''_1, \ldots, x''_{j-1}; x'_j x''_j; x'_{j+1}, \ldots, x'_n))_{j=1, \ldots, n}$$

$$G(x'x''; u', t)=(G(x''_1, \ldots, x''_{j-1}; x'_j x''_j; x'_{j+1}, \ldots, x'_n, u'_1, \ldots, u'_m, t))_{j=1, \ldots, n}$$

$$G(x''; u'u''; t)=(G(x''_1, \ldots, x''_n, u''_1, \ldots, u''_{j-1}; u'_j u''_j; u'_{j+1}, \ldots, u'_m, t))_{j=1, \ldots, m}$$

$$f(x'x''; u', t)=(f_i(x''_1, \ldots, x''_{j-1}; x'_j x''_j; x'_{j+1}, \ldots, x'_n, u'_1, \ldots, u'_m, t))_{\substack{i=1, \ldots, n\\ j=1, \ldots, n}}$$

$$f(x''; u'u''; t)=(f_i(x''_1, \ldots, x''_n, u''_1, \ldots, u''_{j-1}; u'_j u''_j; u'_{j+1}, \ldots, u'_m, t))_{\substack{i=1, \ldots, n\\ j=1, \ldots, m}}.$$

Так как

$$\int_0^T (\lambda', \dot{x}'-\dot{x}'')dt=(\lambda', x'-x'')\Big|_0^T-\int_0^T (\dot{\lambda}', x'-x'')dt,$$

то получим

$$L(z')-L(z'')=(F(x'(T); x''(T)), x'(T)-x''(T))-$$
$$-(\lambda'(T), x'(T)-x''(T))+(\lambda'(0), x'(0)-x''(0))+$$
$$+\int_0^T \{(G(x'x''; u', t)+f^*(x'x''; u', t)\lambda'+\dot{\lambda}', x'-x'')+(G(x''; u'u''; t)+$$
$$+f^*(x''; u'u''; t)\lambda', u'-u'')+(f(x'', u'', t)-\dot{x}'', \lambda'-\lambda'')\}dt,$$

где символ «*» означает соответствующую транспонированную матрицу.

* Символ (a, b) означает скалярное произведение векторов a и b.

Обозначив гамильтониан

$$H(x, u, \lambda, t) = G(x, u, t) + (\lambda, f(x, u, t)),$$

получим

$$H(x'x''; u', \lambda', t) = G(x'x''; u', t) + f^*(x'x''; u', t)\lambda',$$

$$H(x''; u'u''; \lambda', t) = G(x''; u'u''; t) + f^*(x''; u'u''; t)\lambda'.$$

Определим скалярное произведение в пространстве элементов z:

$$[z', z''] = \int_0^T \{(x', x'') + (u', u'') + (\lambda', \lambda'')\} dt.$$

По определению [1]

$$[L(z'; z''), z' - z''] = L(z') - L(z''),$$

где $L(z'; z'')$ — разностный градиент функционала $L(z)$.

Требуя, чтобы

$$\lambda'(T) = F(x'(T); x''(T))$$

и

$$x'(0) = x''(0) = c,$$

получим

$$L(z'; z'') =$$
$$= (\dot{\lambda}' + H(x'x''; u', \lambda', t), H(x''; u'u''; \lambda', t), f(x'', u'', t) - \dot{x}''). \qquad (4.5)$$

Отметим, что уравнение $L(z; z) = 0$ равносильно уравнениям Эйлера—Лагранжа.

Исходя из соответствующих определений

$$L(z'; z''; z''')_1 (z'' - z''') = L(z'; z'') - L(z'; z''')$$
$$L(z'; z''; z''')_2 (z' - z'') = L(z'; z''') - L(z''; z'''),$$

можно построить и вторые разделенные разности $L(z'; z''; z''')_1$ и $L(z'; z''; z''')_2$ для функционала $L(z)$. Они выражаются в виде

$$L(z'; z''; z''')_1 = \begin{pmatrix} H(x'x''x'''; u', \lambda', t) & 0 & 0 \\ H(x''x'''; u'u''; \lambda', t) & H(x'''; u'u''u'''; \lambda', t) & 0 \\ -d/dt + f(x''x'''; u', t) & f(x'''; u''u'''; t) & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.6)$$

и

$$L(z'; z''; z''')_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} H(x'x''x'''; u', \lambda', t) & H^*(x''x'''; u'u''; \lambda', t) & d/dt + f^*(x''x'''; u'', t) \\ 0 & H(x'''; u'u''u'''; \lambda', t) & f^*(x'''; u''u'''; t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.7)$$

Здесь

$$H(x'x''x'''; u', \lambda', t) = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$$

$$H(x''x'''; u'u''; \lambda', t) = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,m}}$$

$$H(x'''; u'u''u'''; \lambda', t) = (c_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,m}},$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} H(x'''_1, \ldots, x'''_{i-1}; x''_i\ x'''_i; x''_{i+1}, \ldots, x''_{j-1}; x'_j\ x''_j; x'_{j+1}, \ldots, x'_n, u', \lambda', t), & \text{если } j > i \\ H(x'''_1, \ldots, x'''_{i-1}; x'_i x''_i x'''_i; x'_{i+1}, \ldots, x'_n, u', \lambda', t), & \text{если } i = j \\ 0, \quad \text{если } j < i; \end{cases}$$

$$b_{ij} = H(x'''_1, \ldots, x'''_{j-1}; x''_j x'''_j; x''_{j+1}, \ldots, x''_n, u''_1, \ldots, u''_{i-1}; u'_i\ u''_i; u'_{i+1}, \ldots, u'_n, \lambda', t),$$

$$c_{ij} = \begin{cases} H(x''', u'''_1, \ldots, u'''_{i-1}; u''_i u'''_i; u''_{i+1}, \ldots, u''_{j-1}; u'_j\ u''_j; u'_{j+1}, \ldots, u'_n, \lambda', t), & \text{если } j > i \\ H(x''', u'''_1, \ldots, u'''_{i-1}; u'_i u''_i u'''_i; u'_{i+1}, \ldots, u'_n, \lambda', t), & \text{если } j = i \\ 0, \quad \text{если } j < i. \end{cases}$$

Теперь на основании (4.1) легко построить алгоритм для решения задачи (4.2), (4.3).

В данном случае получим

$$(\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = (x^{(k+1)} - x^{(k)}, u^{(k+1)} - u^{(k)}, \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}) = = (\Delta x^{(k)}, \Delta u^{(k)}, \Delta\lambda^{(k)})):$$

$$[L(z_k; z_{k-1}; z_{k-2})_1 + L(z_k; z_{k-1}; z_{k-2})_2]\,\Delta z_k = = -L(z_k; z_{k-1}) - L(z_k; z_{k-1}; z_{k-2})_1\ \Delta z_{k-1}\ (k = 2, 3, \ldots)$$

или более подробно

$$\begin{aligned} & d\Delta x^{(k)}/dt + \dot{x}^{(k)} - f(x^{(k-1)}, u^{(k-1)}, t) - \\ & - f(x^{(k-1)} x^{(k-2)}; u^{(k-1)}, t)\,(\Delta x^{(k)} + \Delta x^{(k-1)}) - \\ & - f(x^{(k-2)}; u^{(k-1)} u^{(k-2)}; t)\,(\Delta u^{(k)} + \Delta u^{(k-1)}) = 0; \quad \Delta x^{(k)}(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} & d\Delta\lambda^{(k)}/dt + \dot{\lambda}^{(k)} + H(x^{(k)} x^{(k-1)}; u^{(k)}, \lambda^{(k)}, t) + \\ & + 2H(x^{(k)} x^{(k-1)} x^{(k-2)}; u^{(k)}, \lambda^{(k)}, t)\,(\Delta x^{(k)} + {}^1/_2 \Delta x^{(k-1)}) + \\ & + H^*(x^{(k-1)} x^{(k-2)}; u^{(k)} u^{(k-1)}; \lambda^{(k)}, t)\,\Delta u^{(k)} + f^*(x^{(k-1)} x^{(k-2)}; u^{(k-1)}, t)\,\Delta\lambda^{(k)} = 0; \\ & \Delta\lambda^{(k)}(T) = F(x^{(k)}; x^{(k-1)}; x^{(k-2)})_1 \Delta x^{(k-1)} + F(x^{(k)}; x^{(k-1)}; x^{(k-2)})_2 \Delta x^{(k)}|_{t=T}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} & H(x^{(k-1)}; u^{(k)} u^{(k-1)}; \lambda^{(k)}, t) + H(x^{(k-1)} x^{(k-2)}; u^{(k)} u^{(k-1)}; \lambda^{(k)}, t) \times \\ & \times (\Delta x^{(k)} + \Delta x^{(k-1)}) + 2H(x^{(k-2)}; u^{(k)} u^{(k-1)} u^{(k-2)}; \lambda^{(k)}, t)\,(\Delta u^{(k)} + {}^1/_2 \Delta u^{(k-1)}) + \\ & + f^*(x^{(k-2)}; u^{(k-1)} u^{(k-2)}; t)\,\Delta\lambda^{(k)} = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Вычислительная процедура следующая:

1) выбираются начальные приближения $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \lambda^{(2)}$, причем $x^{(0)}(0)=x^{(1)}(0)=x^{(2)}(0)=c$; $\lambda^{(2)}(T)=F(x^{(2)}(T); x^{(1)}(T))$;

2) на каждом итерационном шагу ($k=2, 3, \ldots$) из (4.10) выразим $\Delta u^{(k)}$ через $\Delta x^{(k)}$ и $\Delta\lambda^{(k)}$; подставив найденное выражение для $\Delta u^{(k)}$ в (4.8) и (4.9), решим линейную краевую задачу (4.8)—(4.9) для нахождения $\Delta x^{(k)}$, $\Delta\lambda^{(k)}$.

Отметим, что в пределе $z_{k-2}=z_{k-1}=z_k$ из (4.8)—(4.10) получим алгоритм метода Ньютона (ср. [8]). Итак, метод (4.8)—(4.10) можно рассматривать как некоторый «организованный» разностный аналог метода Ньютона. Для применения рассматриваемый алгоритм значительно удобнее, так как не требуется вычисления первых и вторых частных производных функций f_i, G и F.

Замечание. По построению разностного градиента $L(z'; z'')$ ясно, что $\lambda^{(k+1)}(T)=F(x^{(k+1)}(T); x^{(k)}(T))$.

Итак, в качестве краевого условия для $\Delta\lambda^{(k)}$ в уравнении (4.9) нужно было бы взять

$$\Delta\lambda^{(k)}(T)=F(x^{(k+1)}(T); x^{(k)}(T))-F(x^{(k)}(T); x^{(k-1)}(T)),$$

т. е. краевая задача (4.8)—(4.9) получилась бы нелинейной.

Справедлива следующая интерполяционная формула Ньютона (ср. с формулой (2.16)):

$$\begin{aligned} F(x'; x'') &= F(x''; x''')+F(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})_1(x''-x''')+ \\ &+F(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})_2(x'-x'')+ \\ &+[F(x'; x''; x''')_1-F(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})_1](x''-x''')+ \\ &+[F(x'; x''; x''')_2-F(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})_2](x'-x''), \end{aligned}$$

откуда

$$F(x'; x'')-F(x''; x''')\approx F(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})_1(x''-x''')+F(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})_2(x'-x''). \tag{4.11}$$

Краевое условие для $\Delta\lambda^{(k)}$ получено линеаризацией на основании формулы (4.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **16**, № 1, 13 (1967).
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.
3. Сергеев А. С., Сибирск. матем. ж., **2**, 2, 282 (1961).
4. Полль В., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **16**, № 1, 35 (1967).
5. Ульм С. Ю., Докл. АН СССР, **158**, № 1, 56 (1964).
6. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 4, 534 (1965).
7. Schmidt J. W., Wiss. Z. der Techn. Univ. Dresden, **12**, Nr. 6, 1601 (1963).
8. Mitter S. K., Automatica, **3**, 135 (1966).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
26/X 1966

S. ULM

ÜLDISTATUD DIFERENTSSUHETEST. II

Artiklis käsitletakse üldistatud diferentssuhete konstrueerimist funktsionaalruumides defineeritud operaatorite puhul, Newtoni interpolatsioonivalemite üldistamist operaatoritele ja funktsionaalidele, teist järku diferentssuhteid sisaldavaid iteratsioonimeetodeid mittesümmeetrilisel juhul, optimaalse juhtimise ülesannete lahendamist J. W. Schmidti üldistatud meetodiga.

S. ULM

ON THE GENERALIZED DIVIDED DIFFERENCES. II

In the article the following problems are being considered: construction of the generalized divided differences for operators in functional spaces, generalization of Newton's interpolation formulas for operators and functionals, investigation of some iteration methods with divided differences of second order, generalization of Schmidt's method for solving some optimal control problems.