EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.2.04

Ю. РЕБАНЕ

О ПРИМИТИВНЫХ КЛАССАХ ОДНОТИПНЫХ АЛГЕБР

Пусть задан примитивный класс K всех однотипных алгебр с системой операций Ω. Как известно, множество всех примитивных классов, содержащихся в классе K, образует структуру $\Sigma(K)$, которая антиизоморфна структуре всех вполне характеристических конгруэнций алгебры S_K-свободной алгебры класса K со счетным числом образующих. Известно также, что $\Sigma(K)$ содержит атомы (например, если $\Omega=\{\omega\}$, ω — бинарная, то мощность множества всех атомов в $\Sigma(K)$ равна континууму [1]).

Следующая теорема показывает, что при довольно слабых ограничениях структура всех вполне характеристических конгруэнций алгебры S_K не содержит ни одного атома.

Теорема. *Пусть класс всех однотипных алгебр* (K, Ω) *таков, что* Ω *не пусто и состоит не только из нульарных операций. Тогда структура* $\Sigma(K)$ *не содержит максимальных элементов.*

Доказательство. Введем следующие обозначения и определения. Через $\Omega_0=\{0^{(i)}, i\in I\}$ обозначим множество всех нульарных операций из Ω; через Ω' — множество $\Omega\setminus\Omega_0$. По нашему предположению $\Omega'\neq\emptyset$. Если P — некоторый примитивный класс, то через S_P обозначим свободную алгебру счетного ранга класса P; по теореме Фудзивара ([2], стр. 161) всякая система свободных образующих алгебры S_P имеет счетное множество элементов. Здесь и в дальнейшем в доказательстве теоремы считаем, что множество Ω зафиксировано.

Определение. *Весом* $l(s)$ слова s из абсолютно свободной алгебры S_K назовем число вхождений в его запись элементов из Ω'. Так, например, если $0', 0''\in\Omega_0$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3\in\Omega'$ (индекс указывает «арность» соответствующей операции), то для слов $x_1x_2x_3\omega_3$, $0'\omega_1 0''\omega_2 x_1\omega_3$, $0'\omega_1\omega_1$, $0''$ их веса соответственно равны 1, 3, 2 и 0.

Рассмотрим теперь какой-нибудь примитивный класс $M\neq K$. Пусть свободная алгебра S_M этого класса имеет систему образующих $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$. Соберем в классе K все соотношения алгебры S_M в системе образующих X. Каждое такое соотношение задается парой связанных формальным равенством слов абсолютно свободной алгебры S_K (свободными образующими которой считаем множество X). Пусть множество всех таких пар слов имеет вид $\{s_\nu(x)=s'_\nu(x)\,|\,\nu\in J\}$. Соберем вместе все соотношения $\{s_\mu(x)=s'_\mu(x)\,|\,\mu\in H\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$s_\mu(x)\not\equiv s'_\mu(x) \tag{1}$$

$$l(s_\mu(x))\leqslant l(s'_\mu(x)), \tag{2}$$

где знак $\equiv$ обозначает графическое равенство слов в S_K.

Обозначим систему всех соотношений, удовлетворяющую условиям (1) и (2), через $\Phi_M(X)$. Хорошо известно, что система $\Phi_M(X)$ однозначно с точностью до изоморфизма определяет алгебру S_M и что для любой другой системы Y свободных образующих алгебры S_M каждое соотношение из $\Phi_M(X)$ имеет место и для $\Phi_M(Y)$ и поэтому число

$$\alpha(M) = \min_{\mu \in H} l(s_\mu(X))$$

не зависит от выбора свободных образующих X.

Назовем число $\alpha(M)$ *рангом* примитивного класса M. Заметим, что для любого класса $M \neq K$ число $\alpha(M)$ существует, так как для S_M существует хотя бы одно соотношение, удовлетворяющее условиям (1) и (2).

Очевидно, *для несовпадения двух примитивных классов M и N достаточно, чтобы* $\alpha(M) \neq \alpha(N)$, но это условие, конечно, не является необходимым.

Рассмотрим теперь какой-либо примитивный класс $L \neq K$. Пусть этот класс задается системой тождественных соотношений Λ и пусть $\alpha(L)$ реализуется следующим соотношением в системе свободных образующих

$X = \{x_1, x_2, \ldots\}$:

$$s = s(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ 0^{(1)}, \ldots, 0^{(k)}) = s'(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ 0^{(1)}, \ldots, 0^{(k)}) = s'. \quad (3)$$

Так как любое соотношение в свободных образующих является для S_L тождеством, то (3) — это тождество класса L. Выбросим из Λ все тождества, кроме (3). Получим новый примитивный класс $M \supseteq L$. Так как $\Omega' \neq \emptyset$, найдется какая-то унарная (основная или главная производная) операция φ.

Построим примитивный класс N, определенный тождеством

$$\begin{aligned}\varphi(s) = \varphi[s(x_1, \ldots, x_n;\ 0^{(1)}, \ldots, 0^{(k)})] = \\ = \varphi[s'(x_1, \ldots, x_n;\ 0^{(1)}, \ldots, 0^{(k)})] = \varphi(s').\end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, $N \supseteq M$.

Докажем, что класс N не совпадает со всем классом K. Для этого достаточно заметить, что из графического неравенства слов s и s' вытекает графическое неравенство слов $\varphi(s)$ и $\varphi(s')$. Поэтому вполне характеристическая конгруэнция ϱ, порожденная парой слов $\varphi(s) = \varphi(s')$ в S_K, является нетривиальной и $N \neq K$.

Докажем, что $M \neq N$. Для этого, как следует из вышесказанного, достаточно показать, что $\alpha(M) < \alpha(N)$.

Очевидно, что $l(s) < l(\varphi(s)) = l(s) + 1$, $l(s') < l(\varphi(s')) = l(s') + 1$. Поэтому $l(\varphi(s)) \leqslant l(\varphi(s'))$. Все соотношения алгебры S_N вытекают из системы соотношений

$$\varphi[s(a_1, \ldots, a_n;\ 0^{(1)}, \ldots, 0^{(k)})] = \varphi[s'(a_1, \ldots, a_n;\ 0^{(1)}, \ldots, 0^{(k)})], \quad (5)$$

где элементы a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ пробегают все множество элементов S_N. Пусть теперь в алгебре S_N имеет место равенство слов $R = T$,

$l(R) \leqslant l(T)$ $(R, T \in S_K)$, а стало быть, существует конечная цепочка слов

$$R = R_0,\ R_1, \ldots,\ R_{m-1},\quad R_m = T \tag{6}$$

такая, что R_i получено из R_{i-1} заменой в последнем какого-то подслова по определяющим соотношениям (5). Но такая замена возможна только тогда, когда слова R_{i-1} и R_i оба имеют веса $\geqslant l(\varphi(s)) = l$. Поэтому любое слово R_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ последовательности (6) имеет вес $\geqslant l$, и тогда для любого равенства $R = T$ $(l(R) \leqslant l(T))$ в алгебре S_N имеем

$$l(R) \geqslant l(\varphi(s)) > l(s),$$

т. е.

$$\alpha(N) = \min_{(R=T)\in\Phi_N(X)} l(R) \geqslant l(\varphi(s)) > l(s) = \alpha(M).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Для случая $\Omega = \Omega_0$ (т. е. когда мы имеем дело с примитивным классом всех множеств с отмеченными точками) теорема неверна. Действительно, как легко видеть, в случае, если Ω содержит более одного элемента, всякое тождество вида $0' = 0''$ $(0' \neq 0'';\ 0', 0'' \in \Omega)$ задает нам максимальный примитивный класс. Если же $\Omega = \Omega_0$ состоит только из одного элемента или же Ω пусто, то всякое неодноэлементное множество в этом классе порождает весь класс и максимальным является абсолютно вырожденный класс.

ЛИТЕРАТУРА

1. K a l i c k i J., S c o t t D., On equational completeness of abstract algebras. Nederl. Acad. Wedensch., Ser. A, 58 (1955).
2. К у р о ш А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1963.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
1/XI 1966

J. REBANE

ÜHETÜÜBILISTE ALGEBRATE MUUTKONDADEST

Olgu K kõigi Ω-algebrate muutkond ja $\Omega \neq \varnothing$ ei koosne ainult konstantidest. Siis kõigi Ω-algebrate muutkondade struktuur ei sisalda maksimaalseid elemente.

J. REBANE

ON VARIETIES OF UNIVERSAL ALGEBRAS

Let K be a variety of all Ω-algebras and $\Omega \neq \varnothing$ consists not only of 0-ary operations. Then the lattice of all varieties of Ω-algebras has no maximal element.