

УДК 62-504.6

Игорь АСТРОВ*

ОШИБКИ УСЕЧЕНИЯ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ РАЗНОСТНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЛАГЕРРРА

(Представил Ю. Яаксоо)

1. Введение

Результат аппроксимации импульсной переходной функции (ИПФ) разностными многочленами Лагеррра зависит от величины лагеррровой постоянной ξ , длины лагеррровой последовательности M и числа отсчетов N ИПФ. Известно [1], что определение оптимальной постоянной ξ очень сложная задача. В [2] показано, что при малых ξ аппроксимируется лучше начало переходной характеристики, а при больших ξ — конец переходной характеристики. В [3] предложен метод для выбора постоянной ξ по заданным полюсам исходной системы (предложено выбирать постоянную ξ в центре тяжести полюсов исходной системы). В [4] предложен алгоритм нахождения оптимальной постоянной Лагеррра с заданной точностью при выбранной длине лагеррровой последовательности.

Следовательно, одним из существенных источников ошибок, которые могут возникнуть при аппроксимации ИПФ разностными многочленами Лагеррра с выбранной постоянной ξ , являются ошибки усечения, т. е. ошибки, связанные с использованием ограниченного числа отсчетов N ИПФ и ограниченной длины лагеррровой последовательности M .

Целью данной статьи является нахождение вышеназванных ошибок усечения и синтез алгоритма определения постоянной Лагеррра, доставляющей минимум среднеквадратическому отклонению заданного отрезка ИПФ от ее аппроксимации, позволяющему устранить эти ошибки усечения на заданном отрезке ИПФ.

2. Аппроксимация ИПФ дискретного объекта разностными многочленами Лагеррра

Для аппроксимации известной ИПФ дискретного объекта воспользуемся разложением ее по конечному числу разностных многочленов Лагеррра $\psi_k(t, \xi)$

$$s_{\text{approx}}(t) \approx \sum_{k=0}^M s_k \psi_k(t, \xi). \quad (2.1)$$

* Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituut (Институт кибернетики Академии наук Эстонии). 200 108 Tallinn, Akadeemia tee 21. Estonia.

Коэффициенты разложения s_k , $k=0, 1, \dots, M$, определяем с помощью оценки методом наименьших квадратов

$$\min_{s_0 \dots s_M} E = \min_{s_0 \dots s_M} \sum_{t=0}^N \left[s(t) - \sum_{k=0}^M s_k \psi_k(t, \xi) \right]^2, \quad (2.2)$$

где $N > M$.

Примем следующие обозначения:

$$\Psi_{0,M}(0, N) = \begin{bmatrix} \psi_0(0) & \psi_1(0) & \dots & \psi_M(0) \\ \psi_0(1) & \psi_1(1) & \dots & \psi_M(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_0(N) & \psi_1(N) & \dots & \psi_M(N) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\gamma^T = [s_0, s_1, \dots, s_M],$$

$$s^T = [s(0), s(1), \dots, s(N)].$$

С учетом (2.3) выражение (2.2) можно переписать так:

$$\min_{\gamma} E = \min_{\gamma} [s - \Psi \gamma]^T [s - \Psi \gamma]. \quad (2.4)$$

Хорошо известно [5], что решением (2.4) является

$$\gamma_{opt} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T s. \quad (2.5)$$

Отметим, что в силу ортонормальности многочленов $\psi_k(t)$ матрица $\Psi^T \Psi$ хорошо обусловлена и поэтому вычисление вектора коэффициентов γ всегда осуществимо.

3. Ошибки усечения, связанные с использованием ограниченного числа отсчетов ИПФ дискретного объекта

Рассмотрим вначале ошибки, которые возникают при использовании ограниченного числа отсчетов заданной ИПФ.

Пусть известны $N+1$ равноудаленных отсчетов заданной ИПФ дискретной системы, но для расчетов мы используем только первые N_1 отсчетов, а остальные N_2 отсчетов (т. е. «хвост» ИПФ) мы отбрасываем. Перепишем $\Psi_{0,M}(0, N)$ из (2.3) таким образом:

$$\Psi_{0,M}(0, N) = \left[\frac{\Psi_{0,M}(0, N_1 - 1)}{\Psi_{0,M}(N_1, N)} \right]. \quad (3.1)$$

С учетом (3.1) выражение (2.5) можно переписать так:

$$\gamma_{N+1} = \left([\Psi_{0,M}^T(0, N_1 - 1) \vdots \Psi_{0,M}^T(N_1, N)] \left[\frac{\Psi_{0,M}(0, N_1 - 1)}{\Psi_{0,M}(N_1, N)} \right]^{-1} \right) \times \quad (3.2)$$

$$\times [\Psi_{0,M}^T(0, N_1 - 1) \vdots \Psi_{0,M}^T(N_1, N)] \left[\frac{S_{N_1}}{S_{N_2}} \right],$$

где

$$s_{N_1}^T = [s(0), s(1), \dots, s(N_1 - 1)],$$

$$s_{N_2}^T = [s(N_1), s(N_1 + 1), \dots, s(N)].$$

Обозначим

$$R_{N_1} = [\Psi_{0,M}^T(0, N_1 - 1) \Psi_{0,M}(0, N_1 - 1)]^{-1}. \quad (3.3)$$

С учетом (3.3) определим R_{N+1} :

$$R_{N+1} = \left([\Psi_{0,M}^T(0, N_1 - 1) \vdots \Psi_{0,M}^T(N_1, N)] \left[\frac{\Psi_{0,M}(0, N_1 - 1)}{\Psi_{0,M}(N_1, N)} \right] \right)^{-1} = \\ = [R_{N_1}^{-1} + \Psi_{0,M}^T(N_1, N) \Psi_{0,M}(N_1, N)]^{-1}. \quad (3.4)$$

Известно такое тождество [6]:

$$[A + BCB^T]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + B^T A^{-1}B]^{-1}B^T A^{-1}, \quad (3.5)$$

при условии, что $A^T = A$, $C^T = C$.

С учетом (3.5) выражение (3.4) можно переписать так:

$$R_{N+1} = R_{N_1} - R_{N_1} \Psi_{0,M}^T(N_1, N) [I + \Psi_{0,M}(N_1, N) \times \\ \times R_{N_1} \Psi_{0,M}^T(N_1, N)]^{-1} \Psi_{0,M}(N_1, N) R_{N_1}. \quad (3.6)$$

Обозначим

$$\gamma_{N_1} = [\Psi_{0,M}^T(0, N_1 - 1) \Psi_{0,M}(0, N_1 - 1)]^{-1} \Psi_{0,M}^T(0, N_1 - 1) s_{N_1}. \quad (3.7)$$

Учитывая (3.6) и (3.7), можно записать после упрощений (3.2) в таком виде:

$$\gamma_{N+1} = \gamma_{N_1} + R_{N_1} \Psi_{0,M}^T(N_1, N) [I + \Psi_{0,M}(N_1, N) \times \\ \times R_{N_1} \Psi_{0,M}^T(N_1, N)]^{-1} [s_{N_2} - \Psi_{0,M}(N_1, N) \gamma_{N_1}]. \quad (3.8)$$

Из (3.8) можно найти ошибку в определении вектора коэффициентов разложения γ , вызванную отбрасыванием «хвоста» ИПФ

$$\Delta \gamma_{N_1} = \gamma_{N+1} - \gamma_{N_1} = R_{N_1} \Psi_{0,M}^T(N_1, N) [I + \Psi_{0,M}(N_1, N) \times \\ \times R_{N_1} \Psi_{0,M}^T(N_1, N)]^{-1} [s_{N_2} - \Psi_{0,M}(N_1, N) \gamma_{N_1}]. \quad (3.9)$$

Отсюда видно, что искомая ошибка $\Delta \gamma_{N_1}$ равна взвешенной разности между вектором отсчетов s_{N_2} («хвоста» ИПФ) и вектором коэффициентов разложения γ_{N_1} (для начальной части ИПФ).

4. Ошибки усечения, связанные с использованием ограниченной длины лагерровой последовательности

Рассмотрим теперь ошибки, связанные с конечной длиной лагерровой последовательности. Ясно, что любое конечное M в (2.1) приводит к тому, что оценки параметров \hat{s}_k будут вычисляться приближенно.

Оценим точность вычисления \hat{s}_k . Для этого предположим, что объект содержит M_2 параметров s_k таких, что

$$s(t) = \sum_{k=0}^{M_1} s_k \psi_k(t, \xi) + \sum_{k=M_1+1}^{M_2} s_k \psi_k(t, \xi). \quad (4.1)$$

При этом считаем, что число M_2 — достаточно большое и лагеррова последовательность длиной M_2 со сколь угодно малой погрешностью аппроксимирует сигнал объекта.

Уравнение (4.1) можно записать в векторно-матричном виде так:

$$s = \Psi_{0,M_1}(0, N) \gamma_{M_1} + \Psi_{M_1+1, M_2}(0, N) \gamma_{M_2}, \quad (4.2)$$

где

$$\gamma_{M_1}^T = [s_0, s_1, \dots, s_{M_1}],$$

$$\gamma_{M_2}^T = [s_{M_1+1}, s_{M_1+2}, \dots, s_{M_2}].$$

Умножая (4.2) слева на $\Psi_{0,M_1}^T(0, N)$, получим:

$$\begin{aligned} \Psi_{0,M_1}^T(0, N)s &= \Psi_{0,M_1}^T(0, N)\Psi_{0,M_1}(0, N)\gamma_{M_1} + \\ &+ \Psi_{0,M_1}^T(0, N)\Psi_{M_1+1, M_2}(0, N)\gamma_{M_2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из (4.3) находим γ_{M_1} ,

$$\begin{aligned} \gamma_{M_1} &= [\Psi_{0,M_1}^T(0, N)\Psi_{0,M_1}(0, N)]^{-1} \times \\ &\times [\Psi_{0,M_1}^T(0, N)s - \Psi_{0,M_1}^T(0, N)\Psi_{M_1+1, M_2}(0, N)\gamma_{M_2}]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (2.5) получим оценку параметров «усеченной части» объекта $\hat{\gamma}_{M_1}$:

$$\hat{\gamma}_{M_1} = [\Psi_{0,M_1}^T(0, N)\Psi_{0,M_1}(0, N)]^{-1} \Psi_{0,M_1}^T(0, N)s. \quad (4.5)$$

С учетом (4.4) и (4.5) можно записать ошибку в определении оценки вектора коэффициентов разложения γ , вызванную отбрасыванием «хвоста» лагерровой последовательности:

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{M_1} &= \hat{\gamma}_{M_1} - \gamma_{M_1} = \\ &= [\Psi_{0,M_1}^T(0, N)\Psi_{0,M_1}(0, N)]^{-1} \Psi_{0,M_1}^T(0, N)\Psi_{M_1+1, M_2}(0, N)\gamma_{M_2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Отсюда видно, что искомая ошибка $\Delta\gamma_{M_1}$ пропорциональна вектору неучитываемых коэффициентов разложения γ_{M_2} .

Так как многочлены $\psi_h(t)$ удовлетворяют условиям ортонормальности

$$\sum_{t=0}^{\infty} \psi_h(t)\psi_m(t) = \delta_{hm},$$

где δ_{hm} — символ Кронекера, то при большом числе отсчетов N можно считать, что:

$$\Psi_{0,M_1}^T(0, N)\Psi_{0,M_1}(0, N) \approx I. \quad (4.7)$$

С учетом (4.7) выражение (4.6) можно переписать так:

$$\Delta\gamma_{M_1} \approx \Psi_{0,M_1}^T(0, N)\Psi_{M_1+1, M_2}(0, N)\gamma_{M_2}. \quad (4.8)$$

5. Алгоритм вычисления оптимальной постоянной Лагерра при аппроксимации заданного отрезка ИПФ

Но ошибки усечения, рассмотренные выше, можно свести к минимуму на любом произвольно заданном отрезке ИПФ. Для этого предлагается использовать алгоритм, рассматриваемый ниже, который является модификацией алгоритма вычисления оптимальной постоянной Лагерра с заданной точностью при выбранной длине лагерровой последовательности [4]. Можно записать такое выражение для E из (2.4):

$$E = [s_2 - \Psi_{0,M}(K, N)\gamma_3]^T [s_2 - \Psi_{0,M}(K, N)\gamma_3], \quad (5.1)$$

где $s_2^T = [s(K), s(K+1), \dots, s(N)]$,

K и N — номера начальной и конечной точек ИПФ соответственно. Коэффициент разложения γ_3 для аппроксимации заданного отрезка ИПФ (K и $K+M$ — номера начальной и конечной точек заданного отрезка ИПФ соответственно; M — длина лагерровой последовательности; причем $K+M < N$) можно найти, предполагая, что с помощью γ_3 добиваемся идеальной аппроксимации на заданном отрезке ИПФ:

$$\Psi_{0,M}(K, K+M)\gamma_3 = s_3, \quad (5.2)$$

где

$$s_3^T = [s(K), s(K+1), \dots, s(K+M)].$$

Из (5.2) получим γ_3 :

$$\gamma_3 = \Psi_{0,M}^{-1}(K, K+M)s_3. \quad (5.3)$$

Выражение для производной E по ξ из [4] с учетом (5.1) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\xi} = & (-2) [s_2 - \Psi_{0,M}(K, N)\gamma_3]^T \left[\left[\frac{d\Psi_{0,M}(K, N)}{d\xi} \right] \gamma_3 + \right. \\ & \left. + \Psi_{0,M}(K, N) \left[\frac{d\gamma_3}{d\xi} \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Учитывая формулу для производной от обратной матрицы [6]

$$\frac{d}{dt} [A^{-1}(t)] = -A^{-1}(t) \left[\frac{dA(t)}{dt} \right] A^{-1}(t),$$

и (5.3), для $\left[\frac{d\gamma_3}{d\xi} \right]$, получим:

$$\left[\frac{d\gamma_3}{d\xi} \right] = -\Psi_{0,M}^{-1}(K, K+M) \left[\frac{d\Psi_{0,M}(K, K+M)}{d\xi} \right] \Psi_{0,M}^{-1}(K, K+M)s_3. \quad (5.5)$$

Выражение (5.4) с учетом (5.3) и (5.5) можно записать в окончательном виде так:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\xi} = & (-2) [s_2 - \Psi_{0,M}(K, N)\Psi_{0,M}^{-1}(K, K+M)s_3]^T \left[\left[\frac{d\Psi_{0,M}(K, N)}{d\xi} \right] \times \right. \\ & \times \Psi_{0,M}^{-1}(K, K+M)s_3 - \Psi_{0,M}(K, N)\Psi_{0,M}^{-1}(K, K+M) \times \\ & \left. \times \left[\frac{d\Psi_{0,M}(K, K+M)}{d\xi} \right] \Psi_{0,M}^{-1}(K, K+M)s_3 \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Элементы матриц Ψ и $\left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right]$ можно вычислять по формулам, предложенным в [4]

$$\psi_0(0) = \sqrt{1 - \xi^2},$$

$$\psi_0(t) = \xi^t \psi_0(0),$$

где $1 \leq t \leq N$.

$$\psi_k(0) = (-1)^{k\xi} \psi_0(0), \quad (5.7)$$

где $1 \leq k \leq M$,

$$\psi_k(t+1) = \xi \psi_k(t) + \psi_0^2(0) \sum_{i=0}^{h-1} (-\xi)^{h-i-1} \psi_i(t),$$

где $1 \leq k \leq M$, $0 \leq t \leq N-1$.

$$\frac{d[\psi_0(0)]}{d\xi} = \frac{-\xi}{\psi_0(0)}.$$

$$\frac{d[\psi_0(t)]}{d\xi} = \frac{\xi^{t-1}[t - (t+1)\xi^2]}{\psi_0(0)},$$

где $1 \leq t \leq N$.

$$\frac{d[\psi_k(0)]}{d\xi} = \frac{(-1)^k \xi^{k-1} [k - (k+1)\xi^2]}{\psi_0(0)},$$

где $1 \leq k \leq M$.

$$\begin{aligned} \frac{d[\psi_k(t+1)]}{d\xi} = & \psi_k(t) + \xi \frac{d[\psi_k(t)]}{d\xi} + \frac{(-2\xi)[\psi_k(t+1 - \xi\psi_k(t)]}{\psi_0^2(0)} - \\ & - \psi_0^2(0) \sum_{i=0}^{k-1} (-\xi)^{k-i-2} \left[(k-i-1)\psi_i(t) + \xi \frac{d[\psi_i(t)]}{d\xi} \right], \end{aligned}$$

где $1 \leq k \leq M$, $0 \leq t \leq N-1$.

Практическое использование алгоритма вычисления оптимальной постоянной Лагерра при аппроксимации заданного отрезка ИПФ должно производиться в следующем порядке:

1. задаем числа K, N, M ($M < N-K$) — номера начальной и конечной точек ИПФ, длину лаггерровой последовательности соответственно;
2. выбираем шаг z изменения ξ и вычисляем значения функции $y(\xi) = \frac{dE}{d\xi}$ в точках: $y(iz)$, где $i=1, 2, \dots, (1/z-1)$, исходя из (5.6) и (5.7);
3. производим полное отделение всех корней уравнения вида:

$$\left. \frac{dE}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_{\text{opt}}} = 0$$

на интервале $\xi \in (0, 1)$ в соответствии с условиями [7]:

$$\frac{dE}{d\xi} \leq 0, \quad \xi < \xi_{\text{opt}};$$

$$\frac{dE}{d\xi} \geq 0, \quad \xi > \xi_{\text{opt}};$$

в результате приходим к отрезку $[a, b]$, в котором содержится ξ_{opt} ;

4. задаем точность ε определения ξ_{opt} и уточняем значение отделенного на $[a, b]$ корня ξ_{opt} методом половинного деления [7] до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon,$$

где n — число, показывающее, сколько раз нужно произвести половинное деление; при этом ξ_{opt} определяется так:

$$\xi_{\text{opt}} = \frac{a_n + b_n}{2};$$

5. вычисляем $s_{\text{аппрок}}(t)$ из (2.1) и сравниваем с исходными значениями $s(t)$ ИПФ.

Пример применения предложенного выше алгоритма (выбраны: $K=19$, $N=29$, $M=3$, $\varepsilon=10^{-7}$, $\xi_{\text{opt}}=0,8287545$) иллюстрирует таблица.

Значения $s(t)$ и $s_{\text{approx}}(t)$		
t	$s(t)$	$s_{\text{approx}}(t)$
19	0,05786672	0,05786327
20	0,04979936	0,04979615
21	0,04285888	0,04285578
22	0,03688688	0,03688383

6. Заключение

Получены выражения для погрешностей оценок вектора коэффициентов разложения ИПФ по разностным многочленам Лагерра, связанных с использованием ограниченного числа отсчетов ИПФ вида (3.9) и ограниченной длины лагероввой последовательности вида (4.6) (или (4.8)). В целях устранения этих ошибок усечения предложено использовать алгоритм определения оптимальной постоянной Лагерра (оценка по методу наименьших квадратов) при аппроксимации заданного отрезка ИПФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. King, R. E., Paraskevopoulos, P. N. Int. J. Circuit Theory and Appl., 1977, 5, 1, 81—91.
2. Нургес Ю., Яаксоо Ю. Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1981, 30, 3, 209—219.
3. Нургес Ю. Автоматика и телемеханика, 1987, 3, 88—96.
4. Астров И. Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1991, 40, 1, 25—30.
5. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Москва, Мир, 1975.
6. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. Москва, Наука, 1984.
7. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Москва, Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
20/V 1991

Igor ASTROV

LOIKAMISE VIGA IMPULSSFUNKTSIOONI APROKSIMEERIMISEL DISKREETSETE LAGUERRE'I POLUNOOMIDEGA

Saadud avaldised (3.9) ja (4.6) kirjeldavad vigu, mis ilmuvad juhul, kui Laguerre'i jada pikkus või impulssfunktsiooni loenduste arv on piiratud. On esitatud algoritm, mis võimaldab leida Laguerre'i optimaalset konstanti. See algoritm võimaldab vigadeta aproksimeerida impulssfunktsiooni, kui selle lõik on antud.

Igor ASTROV

ERRORS OF CUTTING WHEN IMPULSE RESPONSE IS APPROXIMATED BY DISCRETE LAGUERRE POLYNOMIALS

The obtained expressions (3.9) and (4.6) are able to describe the errors connected with the cutting of impulse response and Laguerre consistency, respectively. The algorithm proposed in this paper permits finding optimal Laguerre constant and removing these errors in case when cut-off of impulse response is assigned. The initial data of this algorithm are given by the meanings for the impulse response of a discrete system. This algorithm is based on a solution of equation (5.6) and the numerical method for finding optimal Laguerre constant is defined as a least-squares method.