Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1992, 41, 1, 23—27
https://doi.org/10.3176/phys.math.1992.1.04

УДК 535.552.24

*Альфред ПУРО**

К ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ КУБИЧЕСКИХ МОНОКРИСТАЛЛОВ

(Представил Х. Абен)

В процессе выращивания в монокристаллах образуется остаточное напряжение [1, 2], которое существенным образом влияет на их свойства. Для оценки качества кристаллов и улучшения технологии их производства желательно иметь неразрушающие методы определения напряжений в них. Весьма перспективным направлением разработки таких методов для монокристаллов является интегральная фотоупругость [3]. Методы интегральной фотоупругости основаны на совместном решении задачи оптической томографии тензорного поля напряжений и вытекающей из нее задачи теории упругости [4, 5]. Решение этих двух задач для монокристаллов по сравнению с изотропными объектами существенно усложняется наличием естественной анизотропии [6]. В первой задаче это связано с несовпадением квазиглавных направлений тензора напряжений и тензора диэлектрической проницаемости [7]. Во второй — с тем, что даже в состоянии безградиентного распределения напряжений вдоль оси призмы уравнения кручения и плоской упругой деформации не разделяются. При просвечивании в плоскости упругой симметрии влияние анизотропии уменьшается [8]. Потенциальные возможности метода в этом случае продемонстрированы на конкретных примерах реконструкции осесимметричных напряжений в цилиндрах [6, 8, 9].

Ниже в развитии метода интегральной фотоупругости рассматривается задача определения остаточных напряжений в длинном кубическом монокристалле, ось которого совпадает с кристаллографическим направлением. Предполагается, что 1) образец находится в состоянии плоской упругой деформации $\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zz}=0$; 2) недиагональные члены тензора остаточных деформаций равны нулю, а диагональные связаны соотношением $\varepsilon^0_{zz}=\varepsilon^0_{xx}=\varepsilon^0_{yy}=\alpha T$ и характеризуется одним параметром T — фиктивной температурой остаточных деформаций [1, 2, 10] (α — коэффициент линейного расширения). Остаточные деформации (дисторсии) в монокристаллах существенно зависят от технологии их получения. В частности, при вытягивании монокристалла из расплава тензор остаточной деформации может носить резко выраженный анизотропный характер с преобладанием компоненты деформаций, вдоль которой происходит процесс вытягивания [2]. Вместе с тем температурная обработка изделий, аналогичная процессу отжига стекла, позволяет уменьшить эту анизотропию, в идеале сводя остаточные деформации к структурным, имеющим шаровой тензор остаточных деформаций [1]. Тензор остаточных деформаций может считаться шаровым в монокристаллах, полученных выпеканием, или кристаллизацией из раствора. Нередко для придания монокристаллам необходимых свойств применяются технологии, использующие ионнообменные и диффузионные процессы. Из физической сущности процесса замещения одних ионов другими

* Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituut (Институт кибернетики Академии наук Эстонии). 200108 Tallinn, Akadeemia tee 21. Estonia.

или внедрения добавочных ионов и атомов следует изотропность тензора остаточной деформации. Вышеприведенные рассуждения показывают, что допущение относительно температурного характера остаточных деформаций для многих технологий является обоснованным.

Для реконструкции напряжений предполагается просвечивать монокристалл в плоскости, ортогональной к оси образца. В интегральной фотоупругости исходная информация основывается, как правило, на измерениях двух параметров: разности хода $\delta(x, y)$ и параметра изоклины [3]. В рамках сделанных предположений одно из главных направлений тензора напряжений совпадает с осью z, т. е. параметр изоклины известен из самой постановки задачи. Таким образом, измерению подлежит только один параметр $\delta\ (x, y)$ [3].

Сформулированная выше задача интегральной фотоупругости является типичной при исследовании напряжений в изотропных телах [3]. Ее решение для них [10, 11] легло в основу широко применяемого метода определения остаточных напряжений в заготовках световодов [12].

Введем ортогональную систему координат x, y, z и направим ее оси вдоль кристаллографических направлений [001], [010], [100] так, чтобы направление оси z совпадало с образующей монокристаллического образца. При просвечивании в плоскости $z=\text{const}$ отсутствует вращение квазиглавных направлений тензора диэлектрической проницаемости. Задача оптической томографии упрощается. Разность хода

$$\delta(m, \theta)=\int (E_1\sigma_{mm}+E_2\sigma_{ll}+E_3\sigma_{zz}+E_6\sigma_{lm})\,dl, \tag{1}$$

измеряемая на луче в направлении l, определяется коэффициентами E_i, зависящими только от угла просвечивания θ [8, 9],

$$E_2=-e_2\sin^2 2\theta, \qquad E_3=n^3\ (\pi_{11}-\pi_{12})/2,$$
$$e_2=n_0^3\,(\pi_{11}-\pi_{12}-\pi_{44})/4 \tag{2}$$

и компонентами тензора напряжений σ_{ij}, отнесенного к подвижной системе координат l, m. Здесь n_0 — показатель преломления ненапряженного кристалла, π_{ij} — пьезооптические коэффициенты, θ — угол между осями координат x и m. Как будет показано далее, интеграл от слагаемых, содержащих коэффициенты E_1, E_6, равен нулю и поэтому их значения здесь не приводятся.

При формулировке задачи теории упругости будем исходить из уравнений состояния упругой среды с дисторсией [13, 14, 15]

$$\sigma_{xx}=C_1\varepsilon_{xx}+C_2\varepsilon_{yy}-\alpha_1\varepsilon^0_{zz}, \qquad \sigma_{yy}=C_1\varepsilon_{yy}+C_2\varepsilon_{xx}-\alpha_1\varepsilon^0_{zz},$$
$$\sigma_{zz}=C_2(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})-\alpha_1\varepsilon^0_{zz}, \qquad \sigma_{xy}=C_3\varepsilon_{xy}. \tag{3}$$

Здесь C_i — коэффициент упругости; $\alpha_1=(C_1+2C_2)\alpha$.

Разрешая систему четырех уравнений (3), можно получить выражение $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon^0_{zz}$ через компоненты тензора напряжений.

Удовлетворим уравнениям равновесия введением функции Эйри F (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$\sigma_{ij}=\delta_{ij}\Delta F-\frac{\partial^2}{\partial i\,\partial j}F. \tag{4}$$

Подставляя в уравнение совместности

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varepsilon_{xx}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varepsilon_{yy}=2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\varepsilon_{xy} \tag{5}$$

компоненты тензора деформаций, выраженные через функцию Эйри, получаем разрешающее уравнение

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}F+\frac{2(C_1-C_2)}{C_3}\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}F+\frac{\partial^4}{\partial y^4}F=\Delta\sigma_{zz}, \qquad (6)$$

которое преобразуем

$$\Delta_1\Delta_2 F=k\Delta\sigma_{zz}, \qquad (7)$$

используя операторы [14]

$$\Delta_1 F=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F,\quad \Delta_2 F=\left(k\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F. \qquad (8)$$

Здесь значение k определяется из решения уравнения

$$k^2-2\frac{(C_1-C_2)}{C_3}k+1=0. \qquad (9)$$

Из условия незагруженности боковой поверхности следует, что сама функция Эйри F и ее нормальная производная $\partial F/\partial n$ на контуре области равны нулю [13].

Докажем, что уравнение (6) является уравнением бигармонического типа, т. е. корни уравнения (9) имеют положительные действительные части, что эквивалентно условию $C_1>C_2$. Для этого проведем сравнение уравнений (9) и теплопроводности. Вывод уравнения теплопроводности аналогичен вышеприведенному с той лишь разницей, что при определении ε_{xx}, ε_{yy} из системы (3) используются только два первых уравнения. Вследствие этого коэффициенты перед смешанными производными в левых частях этих уравнений различаются. Для уравнения теплопроводности этот коэффициент равен $2(C_1^2-C_2^2-C_2C_3)/C_2C_3$. Известно также, что он больше нуля $(C_1>\sqrt{C_2(C_2+C_3)})$ [14, 15], что и доказывает выдвинутое утверждение. Для изотропного тела $C_1=C_2+C_3$, поэтому левые части этих уравнений совпадают [11] и соответствуют точно бигармоническому уравнению.

Завершая постановку задачи, упростим лучевой интеграл (1), выражая в нем напряжения через функцию Эйри

$$\delta(m,\theta)=\int\frac{\partial^2}{\partial m^2}F\,dl+E_3\int\sigma_{zz}\,dl. \qquad (10)$$

При упрощении интеграла учитывалось, что

$$E_1\int\frac{\partial^2}{\partial l^2}F\,dl=E_6\int\frac{\partial^2}{\partial l\,\partial m}F\,dl=0, \qquad (11)$$

так как из граничных условий следует, что первая производная от F по любому направлению на контуре равна нулю.

Таким образом, задача реконструкции напряжений сводится к определению σ_{zz} и F из уравнений (7), (10) с учетом краевых условий на контуре сечения объекта.

Сразу же отметим элементарное решение этой системы при условии, что σ_{zz} является гармонической функцией. Из уравнения (6) непосредственно видно, что в этом случае F и остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Значение же σ_{zz} непосредственно определяется обращением лучевого интеграла $\delta\ (m,\theta)$. Таким образом, значение трансверсальных компонент тензора напряжений определяется σ^0_{zz}-частью σ_{zz}, не содержащей гармонических функций [11].

Дальнейшее упрощение процедуры реконструкции напряжений свяжем с разделением уравнений (7), (10). Для этого преобразуем уравнение (7)

$$\Delta_1\Delta_2 F = \frac{k}{1+k}(\Delta_1+\Delta_2)\,\sigma_{zz} \tag{12}$$

и будем разыскивать его решение в виде суммы функций $F=F_1+F_2$, удовлетворяющих соответственно уравнениям

$$\Delta_i F_i = \frac{k}{1+k}\,\sigma_{zz}, \qquad i=1,2 \tag{13}$$

и двум вышеназванным условиям для F. Заметим, что наше рассмотрение не исключает случая комплексных значений k.

Известно, что общее решение уравнения (7) можно представить в виде суммы трех функций: частного решения уравнений (7) и решений однородных уравнений (13). Поэтому вводимое представление общего решения через парциальные — F_1 и F_2 является полным и соответствует разделению частного решения на два слагаемых.

Перейдем в уравнениях (13) к системе координат l, m, в которой проводится просвечивание, и выразим значение

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2}F = \frac{\sigma_{zz}}{1+\varepsilon_1 \sin^2 2\theta} + A, \tag{14}$$

используя для этого преобразованные уравнения. Здесь $\varepsilon_1 = (C_1 - C_2 - C_3)/2C_3$

$$A = \sum_{i=1,2}\left[a_i \frac{\partial^2}{\partial l^2}F_i + b_i \frac{\partial^2}{\partial l\,\partial m}F_i\right], \tag{15}$$

где коэффициенты a_i, b_i зависят только от угла просвечивания. Для справки приведем значение оператора Δ_1

$$\Delta_1 F = \Big[(\cos^2\theta + k\sin^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial m^2} + \tag{16}$$

$$+(k-1)\sin 2\theta \frac{\partial^2}{\partial l\,\partial m} + (k\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial l^2}\Big]F.$$

Для изотропного тела соотношение (14) переходит в известный закон суммы [3,11], который в рассматриваемом случае перестает быть справедливым, что впервые было обнаружено экспериментальным путем в работе С. Иднурма [9].

В результате подстановки (14) в (10) и элементарных преобразований окончательно получаем

$$\delta(m,\theta) = \frac{1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\sin^2 2\theta}{1+\varepsilon_1\sin^2 2\theta} E_3 \int \sigma_{zz}\,dl, \tag{17}$$

где $\varepsilon_2 = E_2/E_3$.

Таким образом, задача интегральной фотоупругости разделилась на две, решение которых можно проводить последовательно. Сначала с помощью обращения преобразования Радона (17) [16] находим значение σ_{zz}, затем из решения уравнения (7) или системы (13) — F и остальные компоненты тензора напряжений.

Не останавливаясь на вопросах численной реализации метода, отметим только, что уравнения (13) аффинным преобразованием координат могут быть сведены к уравнению Пуассона [14].

В заключение сделаем два замечания общего характера.

Во-первых, рассматриваемая задача без существенных усложнений допускает обобщение на случай трансверсально-изотропного коэффициента расширения [11] с эллипсоидальным тензором остаточных деформаций $\varepsilon^0_{zz}=\beta\varepsilon^0_{xx}=\beta\varepsilon^0_{yy}$. Введение постоянной β позволяет более точно учитывать анизотропию пластических деформаций, возникающих при выращивании кристалла.

Во-вторых, если плоскость просвечивания не совпадает с плоскостью упругой симметрии при безградиентном распределении напряжений вдоль оси призмы, напряжения кручения и плоской упругой деформации не разделяются [14] и допущение $\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$ в общем случае не выполняется. И хотя и в этом случае рассматриваемый метод позволяет проводить реконструкцию напряжений, решение соответствующей задачи упругости усложняется, в частности, порядок разрешающего уравнения (7) увеличивается на два, усложняется редукция лучевого интеграла.

Автор считает своей приятной обязанностью выразить благодарность Х. Абену за предложенную тему исследований и С. Иднурму за плодотворную дискуссию и предоставленную литературу по теме статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Инденбом В. Л., Видро Л. М.* Физика твердого тела, 1964, 6, 4, 992—1000.
2. *Инденбом В. Л., Житомирский И. С., Чебанова Т. С.* Кристаллография, 1973, 18, 1, 39—48.
3. *Абен Х. К.* Интегральная фотоупругость. Таллинн, Валгус, 1975.
4. *Aben, H., Idnurm, S., and Puro, A.* Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, 3, 268—275.
5. *Пуро А. Э.* Изв. АН СССР. Механ. твердого тела, 1991, 2, 41—48.
6. *Aben, H., Brosman, E.* VDI — Berichte, 1978, 313, 45—50.
7. *Иднурм С., Иозепсон Ю.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1985, 34, 2, 191—197.
8. *Aben, H.* Photoelasticity in engineering practice (Ed. by S. A. Paipetis and G. S. Holister). London, Elsevier, 1985, 103—108.
9. *Иднурм С.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1986, 35, 2, 172—179.
10. *Poritsky, H.* Phys., 1934, 12, 406—411.
11. *Пуро А. Э.* Доклады АН СССР, 1991, 316, 4, 861—863.
12. *Chu, P. L., Whitbred, T.* Appl. Optics., 1982, 23, 4241—4245.
13. *Новацкий В.* Теория упругости. Москва, Мир, 1975.
14. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Москва, Наука, 1977.
15. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. Москва, Иностр. литер., 1960.
16. *Censor, V.* Proc. of the IEEE, 1983, 71, 3, 409—419.

Поступила в редакцию
23/X 1991

Alfred PURO

KUUBILISTE MONOKRISTALLIDE FOTOELASTSUSEST

Tasapinnalise elastse deformatsiooni eeldusel on vaadeldud jääkpingete leidmise ülesannet pikas kuubilises monokristallis. Läbivalgustustasand langeb kokku elastse sümmeetria tasandiga ja on risti mudeli teljega. On eeldatud, et jääkdeformatsioonide tensor on isotroopne. Kiire integraali inversioonist on määratud pingetensori komponent, mis on läbivalgustustasandi normaali suunaline, teised komponendid on leitud elastsusteooria vastavate ülesannete lahendamisel.

Alfred PURO

ON THE INTEGRATED PHOTOELASTICITY OF CUBIC SINGLE CRYSTALS

Based on the assumption of plane deformation, the problem of determining the residual stresses in long cubic single crystals is investigated. The plane of illumination coincides with that of elastic symmetry and is perpendicular to the model axis. It is assumed that the tensor of the residual stresses is isotropic. The axial stresses are determined, from the inversion of the ray integral. The other components of the stress are reconstructed from the equations of the theory of elasticity.