

УДК 62—504.6

Игорь АСТРОВ *

ВЫБОР ПОСТОЯННОЙ ЛАГЕРРА ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ РАЗНОСТНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЛАГЕРРА

(Представил Ю. Яаксоо)

1. Введение

Результат аппроксимации импульсной переходной функции (ИПФ) разностными многочленами Лагерра в первую очередь зависит от величины лагерровой постоянной ξ и длины лагерровой последовательности M . Число M определяет порядок получаемых уравнений состояния, так как в сущности решается задача частичной реализации. Постоянная ξ определяет характер аппроксимации заданной ИПФ, но определение оптимальной постоянной ξ — очень сложная задача [1]. В [2] показано, что при малых ξ аппроксимируется лучше начало переходной характеристики, а при больших ξ — конец переходной характеристики. В [3] предложен метод для выбора постоянной ξ по заданным полюсам исходной системы (предложено выбирать постоянную ξ в центре тяжести полюсов исходной системы). Следует отметить, что при фиксированном M точность аппроксимации существенно зависит от свободно выбираемой постоянной $\xi \in (0, 1)$.

Целью данной статьи является синтез алгоритма определения постоянной Лагерра, доставляющей минимум среднеквадратическому отклонению ИПФ заданной дискретной системы от ее аппроксимации при выбираемом фиксированном числе членов разложения.

2. Аппроксимация ИПФ дискретного объекта с использованием разностных многочленов Лагерра

Для аппроксимации известной ИПФ дискретного объекта воспользуемся разложением ее по конечному числу разностных многочленов Лагерра $\psi_k(t, \xi)$

$$s_{\text{approx}}(t) \approx \sum_{k=0}^M s_k \psi_k(t, \xi). \quad (2.1)$$

Коэффициенты разложения s_k , $k=0, 1, \dots, M$, определяем с помощью оценки методом наименьших квадратов

$$\min_{s_0 \dots s_M} E = \min_{s_0 \dots s_M} \sum_{t=0}^N [s(t) - \sum_{k=0}^M s_k \psi_k(t, \xi)]^2, \quad (2.2)$$

где $N > M$.

* Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituut (Институт кибернетики Академии наук Эстонии). 200108 Tallinn, Akadeemia tee, 21. Estonia.

Примем следующие обозначения:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_0(0) & \psi_1(0) & \dots & \psi_M(0) \\ \psi_0(1) & \psi_1(1) & \dots & \psi_M(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_0(N) & \psi_1(N) & \dots & \psi_M(N) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\gamma^T = [s_0, s_1, \dots, s_M],$$

$$s^T = [s(0), s(1), \dots, s(N)].$$

С учетом (2.3) выражение (2.2) можно переписать так:

$$\min_{\gamma} E = \min_{\gamma} [s - \Psi\gamma]^T [s - \Psi\gamma]. \quad (2.4)$$

Хорошо известно [4], что решением (2.4) является

$$\gamma_{\text{opt}} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T s. \quad (2.5)$$

Отметим, что в силу ортонормальности многочленов $\psi_k(t)$ матрица $\Psi^T \Psi$ хорошо обусловлена и поэтому вычисление вектора коэффициентов γ всегда осуществимо. Как показано в [2], вычисление многочленов $\psi_k(t)$ можно осуществлять по следующим рекуррентным формулам:

$$\psi_0(0) = \sqrt{1 - \xi^2},$$

$$\psi_0(t+1) = \xi \psi_0(t),$$

$$\psi_{k+1}(0) = -\xi \psi_k(0),$$

$$\psi_k(t+1) = \xi \psi_k(t) + (1 - \xi^2) \sum_{i=0}^{k-1} (-\xi)^{k-i-1} \psi_i(t). \quad (2.6)$$

3. Получение уравнения для нахождения оптимальной постоянной Лагерра

С учетом хорошо известного необходимого признака экстремума [5] оптимальную постоянную Лагерра ξ_{opt} (с оценкой по методу наименьших квадратов) можно найти из условия:

$$\left. \frac{dE}{d\xi} \right|_{\xi = \xi_{\text{opt}}} = 0, \quad (3.1)$$

где E определяется (2.2). С учетом же хорошо известного первого достаточного признака экстремума [5] оптимальную постоянную Лагерра ξ_{opt} можно найти из условий:

$$\frac{dE}{d\xi} \leq 0 \quad \text{при} \quad \xi < \xi_{\text{opt}}, \quad (3.2)$$

$$\frac{dE}{d\xi} \geq 0 \quad \text{при} \quad \xi > \xi_{\text{opt}}.$$

Производную E по скалярному аргументу ξ можно записать так:

$$\frac{dE}{d\xi} = \frac{d(e^T e)}{d\xi} = \left[\frac{de}{d\xi} \right]^T e + e^T \left[\frac{de}{d\xi} \right], \quad (3.3)$$

где $e = s - \Psi\gamma$. Хорошо известно, что если e — вектор-столбец, то:

$$\left[\frac{de}{d\xi} \right]^T e = e^T \left[\frac{de}{d\xi} \right]. \quad (3.4)$$

С учетом (3.4) выражение (3.3) можно переписать так:

$$\frac{dE}{d\xi} = 2e^T \left[\frac{de}{d\xi} \right]$$

или:

$$\frac{dE}{d\xi} = 2[s - \Psi\gamma]^T \frac{d[s - \Psi\gamma]}{d\xi}. \quad (3.5)$$

Производную в (3.5) можно записать так:

$$\frac{d[s - \Psi\gamma]}{d\xi} = - \left[\left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right] \gamma + \Psi \left[\frac{d\gamma}{d\xi} \right] \right], \quad (3.6)$$

где γ определяется из (2.5). Перепишем теперь (2.5) в таком виде:

$$\Psi^T s = \Psi^T \Psi \gamma. \quad (3.7)$$

Дифференцируя (3.7) по ξ , получим:

$$\left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right]^T s = \left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right]^T \Psi \gamma + \Psi^T \left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right] \gamma + \Psi^T \Psi \left[\frac{d\gamma}{d\xi} \right]. \quad (3.8)$$

Из (3.8) найдем $\left[\frac{d\gamma}{d\xi} \right]$:

$$\left[\frac{d\gamma}{d\xi} \right] = [\Psi^T \Psi]^{-1} \left\{ \left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right]^T (s - \Psi\gamma) - \Psi^T \left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right] \gamma \right\}. \quad (3.9)$$

Учитывая (3.6) и (3.9), (3.5) можно записать таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\xi} = & (-2) [s - \Psi\gamma]^T \left\{ \left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right] \gamma + \right. \\ & \left. + \Psi [\Psi^T \Psi]^{-1} \left\{ \left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right]^T (s - \Psi\gamma) - \Psi^T \left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right] \gamma \right\} \right\}, \quad (3.10) \end{aligned}$$

где γ определяется из (2.5). Следовательно, для нахождения оптимального значения ξ , доставляющего минимум среднеквадратическому отклонению (2.2), необходимо найти все корни уравнения (3.1), где $\frac{dE}{d\xi}$ определяется (3.10), затем проверить все полученные корни на соответствие условиям (3.2). Полученный корень ξ_{opt} и будет являться оптимальным значением ξ .

Так как многочлены $\psi_k(t)$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$\sum_{t=0}^{\infty} \psi_k(t) \psi_m(t) = \delta_{km},$$

где δ_{km} — символ Кронекера, то при большом числе отсчетов N ИПФ можно считать, что

$$\Psi^T \Psi \approx I. \quad (3.11)$$

Подставляя (2.5) в (2.4) и с учетом (3.11), получим:

$$E \approx s^T [I - \Psi \Psi^T] s. \quad (3.12)$$

Продифференцировав (3.12) по ξ , получим:

$$\frac{dE}{d\xi} \approx -s^T \left[\left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right] \Psi^T + \Psi \left[\frac{d\Psi}{d\xi} \right]^T \right] s. \quad (3.13)$$

Заметим, что (3.13) имеет более простой вид, чем (3.10), что значительно облегчает вычисления.

4. Вычисление элементов матриц Ψ и $\frac{d\Psi}{d\xi}$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как можно вычислить элементы матриц Ψ из (2.3) и $\frac{d\Psi}{d\xi}$ такого вида:

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \begin{bmatrix} \frac{d[\psi_0(0)]}{d\xi} & \frac{d[\psi_1(0)]}{d\xi} & \cdots & \frac{d[\psi_M(0)]}{d\xi} \\ \frac{d[\psi_0(1)]}{d\xi} & \frac{d[\psi_1(1)]}{d\xi} & \cdots & \frac{d[\psi_M(1)]}{d\xi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d[\psi_0(N)]}{d\xi} & \frac{d[\psi_1(N)]}{d\xi} & \cdots & \frac{d[\psi_M(N)]}{d\xi} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Формулы (2.6) можно переписать так:

$$\psi_0(0) = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (4.2)$$

$$\psi_0(t) = \xi^t \psi_0(0), \quad (4.3)$$

где $1 \leq t \leq N$.

$$\psi_k(0) = (-1)^k \xi^k \psi_0(0), \quad (4.4)$$

где $1 \leq k \leq M$.

$$\psi_k(t+1) = \xi \psi_k(t) + \psi_0^2(0) \sum_{i=0}^{k-1} (-\xi)^{k-i-1} \psi_i(t), \quad (4.5)$$

где $1 \leq k \leq M$, $0 \leq t \leq N-1$.

Следовательно, можно предложить следующий порядок вычисления элементов матрицы Ψ из (2.3): сначала вычисляем $\psi_0(0)$ из (4.2), затем — элементы первого столбца (начиная со второго элемента) из (4.3), затем — элементы первой строки (начиная со второго элемента) из (4.4), затем — элементы (начиная со вторых элементов) всех столбцов, начиная со второго и до последнего из (4.5).

Продифференцировав (4.2) — (4.5), получим:

$$\frac{d[\psi_0(0)]}{d\xi} = \frac{-\xi}{\psi_0(0)}, \quad (4.6)$$

$$\frac{d[\psi_0(t)]}{d\xi} = \frac{\xi^{t-1} [t - (t+1)\xi^2]}{\psi_0(0)}, \quad (4.7)$$

где $1 \leq t \leq N$.

$$\frac{d[\psi_k(0)]}{d\xi} = \frac{(-1)^k \xi^{k-1} [k - (k+1)\xi^2]}{\psi_0(0)}, \quad (4.8)$$

где $1 \leq k \leq M$.

$$\begin{aligned} \frac{d[\psi_k(t+1)]}{d\xi} = & \psi_k(t) + \xi \frac{d[\psi_k(t)]}{d\xi} + \frac{(-2\xi) [\psi_k(t+1) - \xi \psi_k(t)]}{\psi_0^2(0)} - \\ & - \psi_0^2(0) \sum_{i=0}^{k-1} (-\xi)^{k-i-2} \left[(k-i-1) \psi_i(t) + \xi \frac{d[\psi_i(t)]}{d\xi} \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $1 \leq k \leq M$, $0 \leq t \leq N-1$.

Порядок вычисления элементов матрицы $\frac{d\Psi}{d\xi}$ из (4.1) аналогичен порядку вычисления элементов матрицы Ψ , а вычисления производятся по формулам (4.6)—(4.9).

5. Алгоритм вычисления оптимальной постоянной Лагерра

Практическое использование алгоритма вычисления оптимальной постоянной Лагерра должно производиться в следующем порядке:

1. задаем число M (начиная с $M=0$);
2. выбираем шаг z изменения ξ и вычисляем значения функции $y(\xi) = \frac{dE}{d\xi}$ в точках: $y(iz)$, где $i=1, 2, \dots, (1/z-1)$, исходя из (3.10) (или (3.13)), (2.5), (4.2)—(4.5) и (4.6)—(4.9);
3. производим полное отделение всех корней уравнения (3.1) на интервале $\xi \in (0, 1)$ в соответствии с условиями (3.2), в результате приходим к отрезку $[a, b]$, в котором содержится ξ_{opt} ;
4. задаем точность ε определения ξ_{opt} и уточняем значение отделенного на $[a, b]$ корня ξ_{opt} методом половинного деления [6] до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \leq \varepsilon,$$

где n — число, показывающее, сколько раз нужно произвести половинное деление; при этом ξ_{opt} определяется так:

$$\xi_{\text{opt}} = \frac{a_n + b_n}{2};$$

5. вычисляем $S_{\text{approx.}}(t)$ из (2.1) при заданном M и полученном ξ_{opt} и сравниваем их с исходными значениями $S(t)$ ИПФ: в случае, если качество аппроксимации (оцениваем из (2.2)) нас не удовлетворят, то увеличиваем M на единицу и повторяем все вычисления сначала до достижения желаемого качества аппроксимации; в противном случае процесс вычисления ξ_{opt} заканчивается.

Пример применения предложенного выше алгоритма (выбраны: $N=10$, $M=1$, $\varepsilon=10^{-12}$, $\xi_{\text{opt}}=0,4515164619367$) иллюстрирует таблица.

Значения $S(t)$ и $S_{\text{approx.}}(t)$

t	$S(t)$	$S_{\text{approx.}}(t)$
0	2,5	2,500006859916
1	1,1118571	1,111823126003
2	0,49430762	0,4943437012937
3	0,2197193	0,2197444644446
4	0,09766275	0,0976560618336
5	0,04341443	0,0433879689601
6	0,019303093	0,0192719048436
7	0,008585022	0,0085577845046
8	0,0038194751	0,0037990535143
9	0,0016999384	0,0016860195618
10	0,00075690925	0,0007480290934

6. Заключение

Предложен алгоритм, позволяющий находить оптимальное значение постоянной Лагерра с заданной степенью точности при аппроксимации ИПФ с помощью разностных многочленов Лагерра, исходя из известной последовательности равноудаленных отсчетов ИПФ заданной дискретной системы. При этом используется оценка по методу наименьших квадратов при выбранной конечной длине лагероввой последовательности.

ЛИТЕРАТУРА

1. King, R. E., Paraskevopoulos, P. N. Int. J. Circuit Theory and Appl., 1977, 5, № 1, 81—91.
2. Нургес Ю., Яаксоо Ю. Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1981, 30, № 3, 209—219.
3. Нургес Ю. Автоматика и телемеханика, 1987, № 3, 88—96.
4. Эйхгофф П. Основы идентификации систем управления. М., Мир, 1975.
5. Никольский С. М. Курс математического анализа. 1. М., Наука, 1973.
6. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
25/V 1990

Igor ASTROV

LAGUERRE'I KONSTANDI VALIMINE IMPULSSFUNKTSIOONI APROKSIMEERIMISEL DISKREETSETE LAGUERRE'I POLÜNOOMIDEGA

On esitatud algoritmi, mis võimaldab leida Laguerre'i optimaalset konstanti. Kui Laguerre'i jada lõplik pikkus on valitud, kasutatakse vähimruutude meetodit.

Igor ASTROV

CHOICE OF LAGUERRE CONSTANT WHEN IMPULSE RESPONSE IS APPROXIMATED BY DISCRETE LAGUERRE POLYNOMIALS

The algorithm proposed in this paper permits finding optimal Laguerre constant with the accuracy which we want to obtain. The initial data of this algorithm are given by the meaning for the impulse response of a discrete system. This algorithm is based on a solution of equation (3.1), when conditions (3.2) are executed. The numerical method for finding optimal Laguerre constant from (3.1) and (3.10) is defined as a least-squares method.