

УДК 534.2

Урмас РОСС, Андрес ЛАХЕ

ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ В ЖИДКОСТИ

(Представил Х. Абек)

Излагается алгоритм численного нахождения давления, излученного бесконечной некруговой цилиндрической оболочкой, в жидкой среде. Алгоритм основывается на комбинированном применении методов конечных и граничных элементов. Задача решается в три этапа: 1) определение функции Грина оболочки и перемещений оболочки от возмущающей нагрузки; 2) определение излученного давления на поверхности оболочки и перемещений оболочки от излученного давления; 3) определение излученного давления в окружающей оболочку среде. Первый этап решается методом конечных элементов, второй — методом граничных элементов, третий — при помощи интеграла Гельмгольца. Для оценки точности поле, излученное круговой цилиндрической оболочкой, вычисленное описанным методом, сравнивается с полем, вычисленным в рядах. Далее приводятся численные результаты полей, излученных цилиндрической оболочкой овального поперечного сечения с ребрами жесткости и без ребер.

Волновое поле в жидкости, окружающей оболочку канонической формы, является относительно подробно изученной областью акустики [1—3]. Задачи дифракции и излучения акустических волн оболочкой неканонической формы менее изучены. Их удастся решить лишь приближенными методами, например, методом возмущения формы границы [4], или численно.

Численные методы решения задачи дифракции и излучения акустических волн в подавляющем большинстве основываются на применении интегральных уравнений. Наиболее популярными методами являются метод T -матрицы и метод граничных элементов [5—7]. Применение метода T -матрицы для изучения дифракции на некруговой цилиндрической оболочке изложено в [8]. Применение интеграла Гельмгольца (Кирхгофа) в задачах дифракции и излучения импедансным цилиндром с произвольным поперечным сечением рассматривается в монографии Е. Л. Шендерова [9]. В настоящей работе излагается способ численного нахождения поля акустических волн, излученного бесконечной некруговой цилиндрической оболочкой, путем комбинированного применения методов конечных и граничных элементов.

Рассматривается бесконечная упругая цилиндрическая оболочка с произвольной направляющей Γ (рис. 1), помещенная в безграничную идеальную сжимаемую жидкую среду. Пусть оболочка совершает установившиеся вынужденные колебания, порожденные произвольной возбуждающей нагрузкой $p_0(t) = p_0 \exp(-i\omega t)$, действующей на поверхности оболочки; p_0 — интенсивность нагрузки, ω — круговая частота, t — время. Требуется определить излученное оболочкой давление p в жидкой среде.

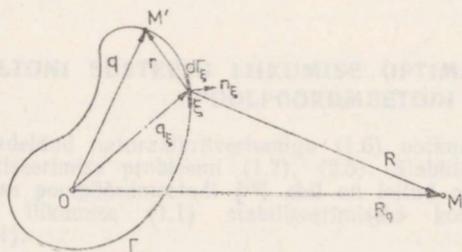


Рис. 1.

Звуковое давление p в жидкой среде удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, k — волновое число, и условию излучения [9]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0, \quad (2)$$

где r — расстояние от начала координат. Кроме того, на поверхности оболочки выполняется граничное условие

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \omega^2 w, \quad (3)$$

где ρ — плотность среды, w — нормальное перемещение оболочки, n — внешняя нормаль к поверхности оболочки.

Решение уравнения (1) при выполнении условия (2) может быть найдено при помощи интеграла Гельмгольца для двумерного случая (интеграл Вебера) [9]

$$p(\mathbf{R}_0) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \left[p(\mathbf{q}_{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(1)}(kR) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} p(\mathbf{q}_{\xi}) \right] d\Gamma_{\xi}, \quad (4)$$

где $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{q}_{\xi}|$, \mathbf{q}_{ξ} — радиус-вектор точки ξ на поверхности оболочки, \mathbf{R}_0 — радиус-вектор точки M в среде (рис. 1), $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода. С учетом соотношения (3) уравнение (4) принимает вид

$$p(\mathbf{R}_0) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \left[p(\mathbf{q}_{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(1)}(kR) \rho \omega^2 w(\mathbf{q}_{\xi}) \right] d\Gamma_{\xi}. \quad (5)$$

Следовательно, для определения давления p , в среде окружающей оболочку, по формуле (5), необходимо знать распределение давления p на поверхности оболочки и нормальное перемещение оболочки w . Обе величины связаны между собой при помощи граничного интегрального уравнения

$$p(\mathbf{q}) - \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \left[p(\mathbf{q}_{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr) \rho \omega^2 w(\mathbf{q}_{\xi}) \right] d\Gamma_{\xi} = 0, \quad (6)$$

которое получено из интеграла (5) путем устремления точки M к поверхности оболочки в точку M' (рис. 1). Здесь $r = |\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\xi}|$, \mathbf{q} — радиус-вектор точки M' .

Как известно, задачи излучения могут иметь различную степень сложности. Если известно давление p на поверхности объекта и перемещение w , тогда давление p в окружающей объекта среде вычисляется интегралом (5). В более сложном случае, если известно только перемещение w , давление p на поверхности объекта следует сперва определить из интегрального уравнения (6) и, затем воспользоваться интегралом (5). В данной работе рассматривается более общий случай, когда известна лишь нагрузка, действующая на поверхность оболочки, и обе величины, т. е. давление p на поверхности оболочки и нормальное перемещение оболочки w являются неизвестными. В этом случае к уравнению (6) следует прибавить еще одно дополнительное уравнение, связывающее давление p и перемещение w , например:

$$w(\mathbf{q}_{\xi}) = w_0(\mathbf{q}_{\xi}) + \int_{\Gamma} G(\mathbf{q}_{\xi}, \mathbf{q}_{\eta}) p(\mathbf{q}_{\eta}) d\Gamma_{\eta}, \quad (7)$$

где ω_0 — нормальное перемещение оболочки от возмущающей нагрузки p_0 , G — функция Грина оболочки.

В последней, более общей постановке, задача излучения является весьма близкой к задаче дифракции. Различия выражаются лишь в способе приложения возмущающей нагрузки p_0 . Если в задачах излучения возмущающая нагрузка приложена непосредственно к оболочке, то в задачах дифракции она передается на оболочку через окружающую оболочку среду.

Подставляя выражение (7) в интегральное уравнение (6), получим разрешающее уравнение для давления p на поверхности оболочки

$$p(q) - \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \left[p(q_{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} H_0^{(1)}(kr) - Q\omega^2 H_0^{(1)}(kr) \int_{\Gamma} G(q_{\xi}, q_{\eta}) p(q_{\eta}) d\Gamma_{\eta} \right] d\Gamma_{\xi} =$$

$$= -\frac{i}{2} Q\omega^2 \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(kr) \omega_0(q_{\xi}) d\Gamma_{\xi}. \quad (8)$$

Отметим, что в данной постановке задачи оболочка может иметь внутренние ребра жесткости. Поскольку внутренние ребра не контактируют с жидкостью, то наличие ребер отражается только при построении функции Грина и определения перемещений ω_0 .

Поставленную задачу можно разбить на три подзадачи: 1) определение функции Грина G и перемещений ω_0 ; 2) определение давления p на поверхности оболочки и перемещений w ; 3) определение давления p в среде, окружающей оболочку.

Первая подзадача решается методом конечных элементов. Колебания оболочки описываются теорией оболочек типа Тимошенко. Матричное уравнение движения оболочки имеет вид

$$([K] - \omega^2[M])\{u\} = \{F\}, \quad (9)$$

где $[K]$ — матрица жесткости оболочки, $[M]$ — матрица массы оболочки, $\{u\}$ — вектор узловых перемещений, $\{F\}$ — вектор узловых нагрузок. Для нахождения матриц $[K]$ и $[M]$ оболочка разбивается на трехузловые элементы, в пределах которых геометрия оболочки, перемещения и распределенная нагрузка аппроксимируются функциями формы, в качестве которых применяются функции Лагранжа второго порядка. Значение аппроксимируемой функции f в точке x элемента определяется тогда формулой

$$f(x) = \sum_{j=1}^3 N_j(x) f_j,$$

где N_j — функция формы (рис. 2), f_j — значение функции f в j -й узловой точке элемента.

Метод конечных элементов позволяет вместо определения функции Грина ограничиться определением ее значений в узловых точках оболочки, которые составляют т. н. матрицу влияния. При этом правой

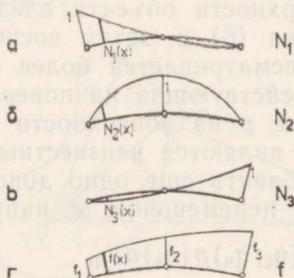


Рис. 2.

частью уравнения (9) является матрица узловых нагрузок $[Q]$, полученная от единичных нормальных давлений, действующих поочередно во всех узловых точках. Каждый столбец матрицы $[Q]$ определяется распределенной нагрузкой, описываемой соответствующей функцией формы (рис. 2, а, б, в).

Решением уравнения

$$([K] - \omega^2[M])[U] = [Q]$$

является матрица узловых перемещений $[U]$, нормальные составляющие членов которой являются членами матрицы влияния $[G]$.

Перемещения от возмущающей нагрузки определяются решением уравнения (9) с вектором узловых возмущающих нагрузок в правой части. Компонентами вектора $\{\omega_0\}$ являются нормальные составляющие компонентов вектора $\{u\}$.

Вторая подзадача — определение излученного давления p на поверхности оболочки решается методом граничных элементов. Для решения уравнения (8) поверхность оболочки разбивается на те же элементы, которые были использованы при решении первой подзадачи. Таким образом, отыскание неизвестной функции p заменяется определением ее значений в узловых точках оболочки при решении матричного уравнения

$$[A]\{p\} = \{C\},$$

где члены матрицы $[A]$ вычисляются по формуле

$$a_{mn} = \delta_{mn} - \frac{i}{2} \sum_e \int_{\Gamma_e} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} H_0^{(1)}(kr_m) N_n(\mathbf{q}_{\xi}) d\Gamma_{\xi} + \\ + \frac{i}{2} \rho \omega^2 \sum_e \int_{\Gamma_e} H_0^{(1)}(kr_m) \sum_j N_j(\mathbf{q}_{\xi}) g_{jn} d\Gamma_{\xi},$$

а компоненты вектора $\{C\}$ по формуле

$$c_m = -\frac{i}{2} \rho \omega^2 \sum_e \int_{\Gamma_e} H_0^{(1)}(kr_m) \sum_j N_j(\mathbf{q}_{\xi}) \omega_{0,j} d\Gamma_{\xi}.$$

Здесь δ_{mn} — символ Кронекера; Γ_e — поверхность элемента e ; $r_m = |\mathbf{q}_m - \mathbf{q}_{\xi}|$; \mathbf{q}_m — радиус-вектор точки m на поверхности оболочки; g_{jn} — член матрицы влияния $[G]$; $\omega_{0,j}$ — компонент вектора нормальных узловых перемещений от возмущающей нагрузки.

Для оценки точности вычисления давления на поверхности оболочки, достигаемой при излагаемом подходе, можно применить принцип взаимности работ для задачи излучения, имеющий форму

$$\int_{\Gamma} p(\mathbf{q}_{\xi}) \omega_0(\mathbf{q}_{\xi}) d\Gamma_{\xi} = \int_{\Gamma} p_0(\mathbf{q}_{\xi}) \omega_p(\mathbf{q}_{\xi}) d\Gamma_{\xi},$$

где ω_p — нормальное перемещение оболочки от излученного давления p ($\omega_p = \omega - \omega_0$).

Третья подзадача — вычисление излученного давления в среде выполняется при помощи интеграла Гельмгольца (Вебера) (5). Разбиение оболочки на элементы остается прежним.

Для оценки точности результатов давление, излученное стальной круговой цилиндрической оболочкой в воде, вычислялось двумя методами при следующих исходных данных: $h/r_0 = 0,05$, $\rho_1/\rho = 7,8$, $c_1/c = 3,82$ (h — толщина оболочки; r_0 — радиус оболочки; ρ_1 — плотность материала оболочки; c_1, c — скорость звука в материале оболочки и в среде соответственно). На рис. 3 показаны диаграммы углового распределения модуля излученного давления при $kr_0 = 15$, вычисленные в

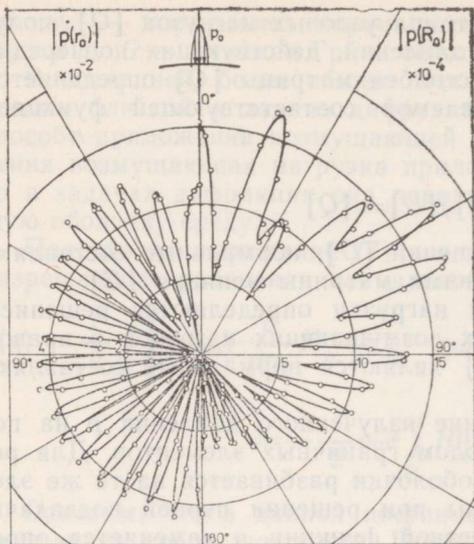


Рис. 3.

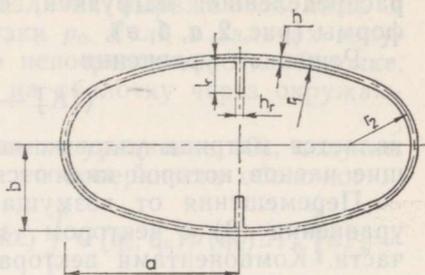


Рис. 4.

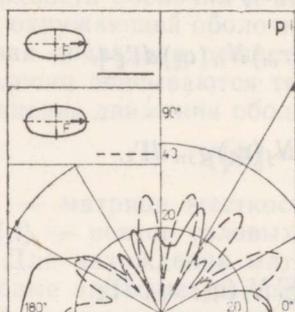


Рис. 5.

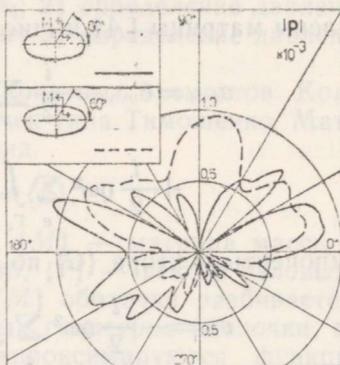


Рис. 6.

рядах (сплошная линия) и изложенным способом (кружочки) (слева — давление на поверхности оболочки, справа — дальнее поле давления, вычисленное на расстоянии $R_0 = 100 r_0$). Расчеты проводились со 100 элементами, т. е. с 200 узловыми точками. Как видно, результаты довольно хорошо совпадают.

Далее приведены результаты расчета давления, излученного в окружающую среду (вода) пустой цилиндрической оболочкой (сталь), имеющей овальную направляющую, как с внутренними ребрами жесткости (рис. 4), так и без ребер, при следующих исходных данных: $r_1/h = 400/3$; $r_2/h = 25$; $a/h = 200/3$; $a/b = 2$; $h_r/h = 14/15$; $l_r/h = 40/3$; $q_1/q = 7,8$; $c_1/c = 3,82$. На рис. 5 приведены угловые диаграммы безразмерного излученного давления $\bar{p} = ph^2 10^4 / F$ от возмущающей нагрузки p_0 в виде сосредоточенной силы F в дальнем поле ($R_0 = 100 a$) при $kh = 0,213$ ($ka = 14,184$). На рис. 6 приведены угловые диаграммы безразмерного излученного давления $\bar{p} = ph^3 / M$ от возмущающей нагрузки M в виде сосредоточенного момента M в дальнем поле при $kh = 0,213$. Сплошной линией показано давление, излученное оболочкой без ребер, штриховой линией — давление излученное оболочкой с ребрами.

1. Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов А. С. Дифракция акустических импульсов на упругих телах. М., Наука, 1979.
2. Векслер Н. Д. Резонансное рассеяние в гидроакустике. Таллинн, Валгус, 1984.
3. Junger, Miguel C. // J. Acoust. Soc. Amer., 1987, 82, 4, 1115—1121.
4. Воробьев С. А., Гузь А. Н. // Прикладная механика, 1983, 19, № 8, 3—10.
5. Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering — Focus on the T-matrix Approach. (ed. V. K. Varadan, V. V. Varadan). New York, Pergamon, 1980.
6. Бенерджи П., Баттерфильд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М., Мир, 1984.
7. Seybert, A. F., Soenarko, B., Rizzo, F. J., Shippy, D. J. // J. Acoust. Soc. Amer., 1985, 77, № 2, 362—368.
8. Baskar, S., Varadan, V. V., Varadan V. K. // J. Acoust. Soc. Amer., 1984, 75, 6, 1673—1679.
9. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., Судостроение, 1972.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
7/IV 1989

Urmast ROSS, Andres LAHE

AKUSTILISTE LAINETE KIIRGAMINE MITTERINGJONELISE RISTLÕIKEGA SILINDRILISELT KOORIKULT VEDELIKUS

On esitatud vedelikus paiknevalt ringjoonest erineva ristlõikega silindriliselt koorikut kiirguva rõhu numbrilise leidmise algoritm. See põhineb lõplike elementide meetodi ja rajaelementide meetodi kombineeritud kasutamisel. Ülesanne lahendatakse kolmes etapis: 1) leitakse kooriku siirded häirivast koormisest ning Greeni funktsioon; 2) leitakse kiirguv rõhk kooriku pinnal; 3) leitakse kiirguv rõhk koorikut ümbritsevas keskkonnas. Esimene etapp lahendatakse lõplike elementide meetodiga, teine etapp rajaelementide meetodiga, kolmas etapp Helmholtzi integraali abil. Esitatakse ringjoonelise ristlõikega koorikult, ribidega ovaalse ristlõikega koorikult ja ribideta ovaalse ristlõikega koorikult kiirgunud rõhuväljade arvutustulemused. Ringjoonelise ristlõikega kooriku arvutustulemusi võrreldakse Fourier' ridadega arvutatud lahendiga.

Urmast ROSS and Andres LAHE

ACOUSTIC WAVE RADIATION FROM A NONCIRCULAR CYLINDRICAL SHELL IN FLUID

An algorithm is presented for numerical determination of pressure radiated by an infinitely long noncircular cylindrical shell in fluid medium. The algorithm is based on combined use of the finite element method and the boundary element method. The problem is solved in three steps: 1) determination of Green's function and shell displacements from an exciting load; 2) determination of the radiated surface pressure; 3) computation of the radiated pressure in the fluid medium. The first step is solved by the finite element method, the second step by the boundary element method and the third step by the Helmholtz integral. The results of calculations are presented for a circular cylindrical shell, for an oval cylindrical shell with ribs, and for an oval cylindrical shell without ribs. The numerical results for the circular cylindrical shell are compared with the solution calculated by Fourier series.