Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 1, 32—39
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.1.05

УДК 519.3 : 51 : 62—50

Игорь КЕЙС

ПОЛУОБРАТНЫЙ СПОСОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

(Представил Ю. Яаксоо)

Задачам стабилизации и оптимизации систем Гамильтона посвящено много работ, обзор результатов которых приведен в [1–8]. В них рассмотрена асимптотическая стабилизация и оптимизация лишь устойчивых движений, проведенная либо способом обращения задачи оптимизации, связанным с неопределенностью выбора критерия [2–5], либо на основе решения нелинейного уравнения Беллмана, представляющего известные [2–5] трудности. Здесь для их уменьшения в задачах экспоненциальной/асимтотической стабилизации стационарно неустойчивых движений систем Гамильтона рассмотрен линеаризующий уравнение Беллмана полуобратный способ А. А. Красовского [9] в оптимизации по предложенному ниже натуральному критерию, ядро которого — сумма лагранжиана [7], квадратичной функции управлений и компенсации работы [9]. На основе этого способа понижения размерности и ее точной линеаризации получены линейные по градиенту функции Беллмана оптимальные регуляторы и условия стабилизации движения оптимальной по натуральному критерию системы Гамильтона из класса гироскопически несвязанных систем [7].

1. Постановка задачи

Пусть $\tilde{z}(t)$ — решение натуральной [7] системы Гамильтона

$$\dot{x}=\mathcal{F}_y,\quad \dot{y}=-\mathcal{F}_x;\quad \mathcal{F}=\mathcal{F}(t,z)=1/2y^{\mathrm{T}}Fy+f^{\mathrm{T}}y-U^{(1)},\tag{1.1}$$

$$\tilde{z}=(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j)^{\mathrm{T}},\quad x=(x_i)^{\mathrm{T}},\quad y=(y_j)^{\mathrm{T}};\quad \Phi_v\equiv\operatorname*{grad}_v\Phi,\quad \dot{\Phi}\equiv\frac{d\Phi}{dt},\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant n,$$

где $0<F^{\mathrm{T}}=F=[f_{ij}(t,x)]$, $f=(f_i(t,x))^{\mathrm{T}}$, $U^{(1)}=U^{(1)}(t,x)$ — непрерывно дифференцируемые функции t, x. Покажем, что для отклонений ξ, η векторов координат x и импульсов y возмущенного движения $z=\tilde{z}(t)+\zeta$, $x=x(t)+\xi$, $y=y(t)+\eta$ имеем форму Гамильтона уравнений возмущенного движения [5, 10]. Действительно, сдвиг каноничен:

$$\dot{\xi}=\mathcal{H}^{(1)}_{\eta},\quad \dot{\eta}=-\mathcal{H}^{(1)}_{\xi}\left(\zeta=(\xi_i,\eta_j)^{\mathrm{T}};\quad \mathcal{H}^{(1)}_{\xi}\Big|_{\zeta=0}\equiv\mathcal{H}^{(1)}_{\eta}\Big|_{\zeta=0}\equiv 0\right),$$

$$\mathcal{H}^{(1)}(t,\zeta)=\mathcal{F}(t,\tilde{z}(t)+\zeta)-\mathcal{F}(t,\tilde{z}(t))-\zeta\cdot\mathcal{F}_{\tilde{z}(t)}=\tag{1.2}$$

$$=1/2\eta^{\mathrm{T}}F(t,\tilde{x}(t)+\xi)\eta+\eta^{\mathrm{T}}g(t,\tilde{z}(t);\xi)+P(t,\tilde{z}(t);\xi),$$

$$g(t,\tilde{z}(t);\xi)=[F(t,\tilde{x}(t)+\xi)-F(t,\tilde{x}(t))]y+f(t,\tilde{x}(t)+\xi)-f(t,\tilde{x}(t)),$$

$$P(t,\tilde{z}(t);\xi)=U^{(1)}(t,\tilde{x}(t))-U^{(1)}(t,\tilde{x}(t)+\xi)+\xi\cdot U^{(1)}_{\tilde{x}(t)}+$$

$$+\tilde{y}^{\mathrm{T}}\left\{\frac{1}{2}\left[F(t,\tilde{x}(t)+\xi)-F(t,x(t))-\xi\cdot F_{\tilde{x}(t)}\right]\tilde{y}+\right.$$

$$\left.+\left[f(t,\tilde{x}(t)+\xi)-f(t,\tilde{x}(t))-\xi\cdot f_{\tilde{x}(t)}\right]\right\},$$

где $a\cdot b=a^{\mathrm{T}}b=\sum_{s=1}^{n} a_s b_s$; $F(t, \tilde{x}(t)+\xi)>0$, т. е. $F(\cdot)$ — положительно определенная матрица. Ниже рассмотрим класс гироскопически несвязанных [7] систем (1.2), где либо гироскопический вектор $g\equiv 0$, либо известно [11] каноническое преобразование переменных $z\leftrightarrow\zeta$ с производящей функцией Ψ, валентностью $\varepsilon=\mathrm{const}\neq 0$, вида

$$p\cdot\delta q-\mathcal{H}\,\delta t\equiv\varepsilon(\eta\cdot\delta\xi-\mathcal{H}^{(1)}\,\delta t)-\delta\Psi,\quad \zeta=\zeta(t,z;\varepsilon), \tag{1.3}$$

$$\Psi=\Psi(t;\varepsilon,\zeta,z)\subset C_1[E^1\times E^{2n}\times E^{2n}];\quad z=(q_i,p_j)^{\mathrm{T}},$$

$$\zeta=(\xi_i,\eta_j)^{\mathrm{T}};\quad E^1_+\equiv\{\varepsilon\,|\,\varepsilon\neq 0\},\quad \varepsilon=\mathrm{const};\quad 1\leqslant i,\quad j\leqslant n,$$

$$\xi=\xi(t,z;\varepsilon)=\hat{\xi}(t,q;\varepsilon)\subset C_1[E^1\times E^n\times E^1_+],\quad \hat{\xi}(t,0;\varepsilon)\equiv 0,$$

$$\eta=\eta(t,z;\varepsilon)=N(t,q;\varepsilon)p+\eta_0(t,q;\varepsilon)\subset C_1[E^1\times E^n\times E^n\times E^1_+],$$

$$\zeta=0\leftrightarrow z=0;\quad N=[n_{ij}(t,q;\varepsilon)],\quad \eta_0(t,0;\varepsilon)\equiv 0,$$

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}(t,z;\varepsilon)=\Psi_t+\varepsilon\,\mathcal{H}^{(1)}=\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}H(t,q;\varepsilon)p-U(t,q;\varepsilon),$$

$$H=H^{\mathrm{T}}=[h_{ij}]>0;\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant n,$$

сводящее g к нулю в новой функции Гамильтона. Если $g\equiv 0$, то $\varepsilon=1$, $\Psi=\xi\cdot p$, $\mathcal{H}=\mathcal{H}^{(1)}$, z обозначает ζ. Ниже опустим зависимость от фиксированной валентности $\varepsilon=\mathrm{const}\neq 0$. В новых переменных z (1.3) имеем систему Гамильтона

$$\dot{q}=\mathcal{H}_p,\quad \dot{p}=-\mathcal{H}_q;\quad \mathcal{H}(t,0)\equiv 0,\quad \mathcal{H}_z(t,0)\equiv 0 \tag{1.4}$$

с единственной точкой покоя $z=0$, соответствующий $\zeta=0$ системы (1.2).

Поэтому задача оптимальной стабилизации движения $\zeta=0$ системы (1.2) эквивалентна аналогичной задаче для (1.3) и (1.4). Имеет смысл ограничиться стабилизацией критического случая (неустойчивого для стационарной системы (1.4) ($\mathcal{H}_t\equiv 0$)) движения $z=0$, когда потенциалы P, $-U$ систем (1.2), (1.4) в $\xi=0$, $q=0$ имеют на E^n строгий глобальный максимум

$$P(t,0)=0;\quad P(t,\xi)<0,\quad \xi\neq 0;\quad U(t,0)=0,\quad U(t,q)>0,\quad q\neq 0.$$

Тогда лагранжиан $\mathfrak{L}$ системы (1.4), заданный сопряженной $\mathcal{H}$ функцией $L(t,\mathrm{q},\dot{q})=p\cdot\dot{q}-\mathcal{H}$, где $\dot{q}=\mathcal{H}_p$, будет положительно определенной функцией z вида

$$\mathfrak{L}(t,z)=1/2\,p^{\mathrm{T}}H(t,q)p+U(t,q)>0,\quad z\neq 0;\quad \mathfrak{L}(t,0)=0. \tag{1.5}$$

Рассмотрим оптимизацию по натуральному (при $Q\equiv 0$) критерию с функционалом компенсации

$$I[t,z(t)\,|\,u]=\int_t^T \mathcal{K}(s,z[s],u[s]);\quad Q(s,z[s])\,ds\to\min_u, \tag{1.6}$$

$$\mathcal{K}=\mathfrak{L}(t,z)+1/2\,u^{\mathrm{T}}R(t,z)u+Q(t,z);\quad R=R^{\mathrm{T}}=[r_{s\sigma}(t,z)]>0,$$

$$\mathcal{K}>0,\quad z\neq 0,\quad u\neq 0;\quad R(t,z)\subset C[E^1\times E^{2n}];\quad 0\leqslant Q(t,z)\subset C[E^1\times E^{2n}],$$

$$t\leqslant s\leqslant T\leqslant+\infty;\quad u=(u_\sigma)^{\mathrm{T}};\quad 1\leqslant\sigma,\quad s\leqslant r\leqslant n.$$

с целью стабилизации движения $z=0$ системы (1.4), регулируемой линейными по вектору управления u силами

$$\dot{q}=\mathcal{H}_p,\quad \dot{p}=-\mathcal{H}_q+Bu;\quad B=[b_{i\sigma}(t,z)]\subset C[E^1\times E^{2n}], \tag{1.7}$$

Здесь Q — неотрицательная функция компенсации, заданная или устанавливаемая аналогично способу [9], B — матрица усиления полного ранга $r_B = r = \dim u \leqslant n = \dim q$, $r \geqslant 1$, $B = B(t, z)$.

Если $u \equiv 0$, $Q \equiv 0$, то $I[t, z|0]$ — z-положительно определенная функция действия $\hat{S}(t, z) > 0$, $z \neq 0$, $t < T$; $\hat{S}(t, 0) = 0$ [12].

Вектор-функция $u^0 = u^0(t, z)$, минимизирующая (1.6), определяет при выполнении рассматриваемых ниже достаточных условий полуобратного способа оптимальный регулятор системы (1.7), асимптотически стабилизирующий [3, 13] нулевое решение $z = 0$ (1.4) или $\tilde{z}(t)$ для класса (1.1), (1.3) систем Гамильтона.

2. Полуобратный способ решения задачи

Обозначим $\mathfrak{L}$, $\hat{S}$ стационарные значения L, $\hat{I}$ величин

$$\mathfrak{L}(t, q, p) = L(t, q, \dot{q})\,|\,\dot{q} = \mathcal{H}_p > 0, \quad L = p \cdot \dot{q} - \mathcal{H}, \quad z \neq 0 \tag{2.1}$$

$$\hat{S}(t, z(t); T) = \operatorname{stat} \hat{I}[z(\tau)], \quad \hat{I}[z[\tau]] = \int_t^T \mathfrak{J}(\tau, q[\tau], p[\tau])\, d\tau \tag{2.2}$$

соответственно по p и $q[\tau]$, $p[\tau]$, удовлетворяющим (1.4) с начальными значениями $q(t)$, $p(t)$. Из (1.4), (1.7), дифференцируя (2.2) по t, найдем

$$\frac{d}{dt}\hat{S}\,\Big|_{\forall u} = \frac{d}{dt}\hat{S}\,\Big|_{u=0} + Bu \cdot \hat{S}_p = -\mathfrak{L} + \beta \cdot u; \quad \beta \equiv B^{\mathrm{T}} \hat{S}_p. \tag{2.3}$$

Согласно разделу 1 введем ядро показателя качества задачи

$$\mathcal{K} = \mathfrak{L} + 1/2\, u^{\mathrm{T}} R u + Q; \quad \mathcal{K} > 0, \quad z \neq 0, \quad u \neq 0; \quad Q \neq Q(t, z) \geqslant 0, \tag{2.4}$$

где $Q(t, z)$ — подлежащая определению неотрицательная функция компенсации, а остальные обозначения имеют смысл (1.4), (1.6), (1.7). Из условия точной линеаризации уравнения Беллмана—Якоби на функцию $W(t, z) \equiv V(t, z) - \hat{S}(t, z)$ найдем величину Q согласно полуобратному способу [9]. Здесь V — оптимальная функция Беллмана задачи минимизации

$$I = \int_t^T \mathcal{K}(s, z, u; Q)\, ds \to \min_u \equiv V(t, z; T); \quad \mathcal{K} \geqslant 0, \tag{2.5}$$

при связях (1.7), (2.4) [2–5, 14]. В обозначениях (2.1), (2.2) и

$$V \equiv \hat{S} + W, \quad \beta \equiv B^{\mathrm{T}} \hat{S}_p, \quad b \equiv B^{\mathrm{T}} W_p; \quad M = M^{\mathrm{T}} \equiv B R^{-1} B^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \quad r_M = r, \tag{2.6}$$

из (2.3)—(2.6) получим гамильтониан $G[V, u|\cdot]$ оптимальной системы (1.7), (2.5) [2, 4, 5, 14] в виде

$$G[V, u|t, z] \equiv \dot{V}\big|_{\forall u} + \mathcal{K} = \dot{W}|_{u=0} + h(u, \cdot) + Q, \tag{2.7}$$

где $\dot{\Phi}\,\Big|_{\forall u} \equiv \dfrac{d\Phi}{dt}\Big|_{\forall u} = \Phi_t + \mathcal{H} \cdot \Phi_q + (Bu - \mathcal{H}_q) \cdot \Phi_p$,

$$h(u, \cdot) \equiv 1/2\, u^{\mathrm{T}} R u + u^{\mathrm{T}} (b + \beta); \quad \dot{\Phi}|_{u=0} = \Phi_t + \mathcal{H}_p \cdot \Phi_q - \mathcal{H}_q \cdot \Phi_p, \tag{2.8}$$

$$\forall \Phi = \Phi(t, z) \subset C_1[E^1 \times E^{2n}]; \quad a \cdot c \equiv a^{\mathrm{T}} c \equiv \sum_{i=1}^n a_i c_i.$$

Из условия $\min\limits_u G[V, u|\cdot]=0$ в силу (2.7), (2.8) находим единственный экстремальный регулятор $u^0=u^0[t, z|\hat{S}, W]$ системы (1.7), (2.5) линейного вида по $\hat{S}_p$, W_p и уравнение Беллмана—Якоби

$$u^0=-R^{-1}(b+\beta); \quad \dot{W}|_{u=0}-a\cdot b-\frac{1}{2}(\beta^{\mathrm{T}}R^{-1}\beta+b^{\mathrm{T}}R^{-1}b)+Q=0, \tag{2.9}$$

где $\min\limits_u G=\dot{W}|_{u=0}+\min\limits_u h(u, \cdot)+Q=\dot{W}|_{u=0}+h(u^0, \cdot)+Q=0;\ a\equiv R^{-1}\beta$.
Для линейности (2.9) по W достаточно положить

$$Q\equiv Q[W_p, \cdot]\equiv 1/2\, b^{\mathrm{T}}R^{-1}b\equiv 1/2\, W^{\mathrm{T}}_p MW_p\geqslant 0, \tag{2.10}$$

когда уравнение (2.9) в общем случае линейно и неоднородно

$$W_t+\mathcal{K}_p\cdot W_q-(\mathcal{K}_q+M\hat{S}_p)\cdot W_p=1/2\,\hat{S}^{\mathrm{T}}_p M\hat{S}_p\geqslant 0. \tag{2.11}$$

Функции $\hat{S}(t, z)$, $W(t, z)$ удовлетворяют краевым условиям

$$\hat{S}(T, z; T)\equiv W(T, z; T)\equiv 0, \quad \forall z=(q_i, p_j)^{\mathrm{T}}\in E^{2n}, \tag{2.12}$$

$$\partial(\hat{S}+W)/\partial z|_{t=T}\equiv \partial V/\partial z|_{t=T}\equiv 0.$$

Введем функцию $\omega(t, z)\equiv W+(1/2)\hat{S}$ и обозначения

$$a_1=a_1(t, z)\equiv\mathcal{K}_p, \quad a_2=a_2(t, z)\equiv-(\mathcal{K}_q+M\hat{S}_p), \quad k=1/2\,\hat{S}^{\mathrm{T}}_p M\hat{S}_p, \tag{2.13}$$

$$D[\Phi]\equiv\Phi_t+a_1(t, z)/\Phi_q+a_2(t, z)\cdot\Phi_p; \quad \omega=\omega(t, z)=\omega(t, z; T).$$

Из (2.11)—(2.13) следует, что $\omega(t, z)$ удовлетворяет уравнению

$$D[\omega]=1/2\frac{d}{\mathrm{dt}}\hat{S}\Big|_{u=0}=-1/2\,\mathfrak{L}; \quad \omega(T, z; T)=0, \tag{2.14}$$

решение которого единственно и неотрицательно по методу характеристик в параметрической форме [9]

$$\omega=w(\tau; t[0], z[0])=\int\limits_0^\tau\hat{k}(t[s], z[s])ds; \quad \hat{k}\equiv-\frac{\mathfrak{L}}{2}; \quad \tau=t-T\leqslant 0. \tag{2.15}$$

Здесь функции $t=t[s]$, $z=z[s]$ — решения уравнений характеристик

$$\frac{\mathrm{dt}}{ds}=1; \quad \frac{dq}{ds}=a_1(t, z), \quad \frac{dp}{ds}=a_2(t, z); \quad \frac{d\omega}{ds}=\hat{k}(t, z), \tag{2.16}$$

$$t[s]=s+T; \quad z[s]=\varphi(s; t[0], z[0]); \quad t[\tau]=\tau+T,$$

из которых исключение τ, $z[0]$ в w (2.15) дает единственную искомую функцию $\omega=\omega(t, z)\leftrightarrow w(\tau; T, z[0])$. В силу (2.15), (2.16) функция компенсации (2.10) и u^0 (2.9) суть

$$Q=Q^0=1/2\,W^{0\mathrm{T}}_p MW^0_p; \quad u^0=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}(\omega^0_p+1/2\,\hat{S}_p); \quad W^0=\omega^0-\frac{\hat{S}}{2}. \tag{2.17}$$

Замечание 1. Замена Q на $\tilde{Q}\equiv Q^0-1/2\mathfrak{L}$ эквивалентна смене $\mathcal{K}$ на $\tilde{\mathcal{K}}\equiv\mathcal{K}-1/2\,\mathfrak{L}$ в ядре (2.4), сводящей (2.14) к однородному уравнению. Его решение — тривиальный $\omega^0\equiv 0$ инвариант характеристик (2.16) при (2.12), когда

$$\tilde{\mathcal{K}}=1/2(\mathfrak{L}+u^{\mathrm{T}}Ru+1/4\,\hat{S}^{\mathrm{T}}_{p}M\hat{S}_{p});\quad \tilde{Q}=1/2(1/4\,\hat{S}_{p}M\hat{S}_{p}-\mathfrak{L}). \tag{2.18}$$

Функция Беллмана V и экстремальный регулятор (2.17) задачи с ядром (2.18) зависят лишь от действия $\hat{S}$ (2.2)

$$V=\tilde{V}\equiv 1/2\,\hat{S};\ u^0=\tilde{u}^0=-1/2\,R^{-1}B^{\mathrm{T}}\hat{S}_p. \tag{2.19}$$

Недостатком случая (2.19) оптимальной стабилизации (1.7) будет зависимость динамики системы (1.7), замкнутой регулятором $\bar{u}^0(t,z)$

$$\dot{q}=\mathcal{H}_p,\quad \dot{p}=-\mathcal{H}_q-1/2\,M\hat{S}_p$$

исключительно от свойств функций $\hat{S}$, $\mathcal{H}$, M (2.6).

С другой стороны, если $\mathcal{H}\geqslant 0$ при $z\neq 0$, $\mathcal{H}_t\equiv 0$, $T=\infty$, то используя инвариант $\mathcal{H}$ (1.7) для $u\equiv 0$, можно осуществить асимптотическую стабилизацию устойчивости плоскости $p=0$ системы (1.7) по всем или части ее переменных z оптимально по критериям типа (2.5) с заменой в них $\mathfrak{L}$ на $\mathcal{H}$ аналогично примерам раздела 3 и результатам [3–5].

В общем случае $V=\omega^0(t,z)+1/2\hat{S}(t,z)$. На основании [2, 7] u^0 (2.17) будет оптимальным по (2.5) (при $T=+\infty$, (2.10)) регулятором z-асимптотической стабилизации, если $\exists V_1, V_2, V_3$, когда

$$V_1(\varrho)\leqslant V(t,z)=\omega^0+1/2\,\hat{S}\leqslant V_2(\varrho);\quad V_\alpha>0,\quad \varrho>0,\quad V_\alpha(0)=0, \tag{2.20}$$

$$V_3(\varrho)\leqslant -\dot{V}|_{u^0}=\mathfrak{L}+1/2(\omega^{0\mathrm{T}}_{p}M\omega^0_{p}+1/2\,\hat{S}^{\mathrm{T}}_{p}M\hat{S}_p);\quad V_3>0,\quad \varrho>0,$$

где $V_\beta(\varrho)$ — непрерывны, $V_\alpha(\varrho)$ монотонно возрастают, $V_\beta\leqslant\infty$

$$\varrho\equiv\|z\|;\quad \|z\|^2\equiv\sum_{i=1}^{n}(q_i^2+p_i^2);\quad \alpha=1,2;\quad \beta=1,2,3.$$

Смысл остальных символов дают равенства (2.1)—(2.3), (2.6), (2.16). Из (2.14), (2.17), (2.19), (2.20) имеем

$$\tilde{V}^{\cdot}|_{\tilde{u}^0}-V^{\cdot}|_{u^0}=1/2(\mathfrak{L}+\omega^{0\mathrm{T}}_{p}M\omega^0_{p})>0.$$

Отсюда следует, что локальная скорость гашения $\|z\|$ (соответственно по V и $\tilde{V}$ [3]) при действии регулятора (2.17) больше, чем для (2.19).

Достаточные условия экспоненциальной устойчивости на $t_0\leqslant t\leqslant T\leqslant\infty$ решений системы (1.7), замкнутой (2.17), получим из (2.20) при следующих допущениях.

Пусть существуют положительные постоянные c_β такие, что

$$c_1\varrho\leqslant V(t,z)\leqslant c_2\varrho;\quad V=\omega^0+1/2\,\hat{S};\quad c_\beta>0,\quad 1\leqslant\beta\leqslant 3, \tag{2.21}$$

$$\mathfrak{L}+1/2(\omega^{0\mathrm{T}}_{p}M\omega^0_{p}+1/2\,\hat{S}^{\mathrm{T}}_{p}M\hat{S}_p)\geqslant c_3V(t,z);\quad \varrho\equiv\|z\|.$$

Из (2.21) и неравенства $\dot{V}|_{u^0}\leqslant -c_3V$ следует оценка

$$\|z(t)\|\leqslant c_1^{-1}c_2\|z(t_0)\|\exp[-c_3(t-t_0)],\quad t_0\leqslant t\leqslant T<\infty, \tag{2.22}$$

совпадающая с критерием Н. Н. Красовского экспоненциальной устойчивости покоя системы (1.7), (2.17). Заменив второе условие в (2.21) неравенством $\lambda V\leqslant -\dot{V}|u^0$ с интегрируемой на $[t_0,T]$ функцией $\lambda=\lambda(t)$, получим монотонную оценку интегральной экспоненциальной ограниченности покоя

$$\|z(t)\|\leqslant V_1^{-1}\{V_2(\|z(t_0)\|)\exp\int_{t_0}^{t}[-\lambda(s)]ds\},\quad t_0\leqslant t\leqslant T,$$

где $V_1^{-1}\{\varrho\}$ — величина, обратная для $V_1\{\varrho\}$, непрерывная монотонно-возрастающая функция: $V_1^{-1}\{V_1(\varrho)\}\equiv\varrho$, $V_1^{-1}(0)=0$.

Замечание 2. При агрегировании или же неполной обратной связи, когда известна y-компонента z вида $y=Cz$, где $(l\times 2n)$ матрица C постоянна, ранга l и выбор ее элементов имеют некоторую степень произвола, можно на основе регулятора (2.17) $u^0(t,z)$ $(l\ll n)$ искать субоптимальный регулятор $\bar{u}(t,y)\equiv u^0(t,Cz)$, минимизирующий в точке t_0, $z_0 I^0[C]$ — натуральный критерий (2.5) $(Q\equiv 0)$ по свободным параметрам матрицы C, согласно методу градиентов [6, 14, 15].

3. Примеры

Оптимальную z-стабилизацию движения $z=0$ консервативной системы Гамильтона

$$\dot{q}=h_p,\quad \dot{p}=Bu-h_q;\quad h_t\equiv 0,\quad h=h(z), \tag{3.1}$$

обладающей следующими свойствами

$$h(0)=0,\quad 0<h(z),\quad z\neq 0;\quad h_q\,|_{p=0,\,q\neq 0}\neq 0,$$

$$h_z=0,\quad z=0;\quad h\subset C_2[\|z\|<\infty];\quad a^1\neq 0.\quad p\neq 0,$$

где

$$a^1\equiv -B^{\mathrm{T}}b,\quad b\equiv h_p;\quad a^1=0,\quad p=0;\quad B\equiv\|p\|A_0,$$

$$A_0=[a_{is}(z)]\subset C_1[\|z\|<\infty];\quad u=(u_s)^{\mathrm{T}},\quad 1\leqslant i\leqslant n=\dim q\geqslant r\geqslant s,$$

проведем при условии $0\leqslant \nu(u)\leqslant \nu^0=\mathrm{const}$, где $\nu=\nu(u)$ положительно однородная выпуклая функция типа нормы Атанса—Летова [3]. Найдем на ограниченном или бесконечном множестве начальных значений $N_0\equiv\{z_0\,|\,h(z_0)<l^0\}$, где $l^0=\mathrm{const}>0$, $l^0=\sup h$ при $z\in E^{2n}$, регулятор $u^0=u^0(z)$, минимизирующий функционал:

$$\tilde{I}=\int\limits_{t_0}^{\infty}\tau(z)\,[f_0(h)+f_1(h,\nu)]\,\mathrm{d}t,\quad t_0\geqslant 0;\quad \tilde{I}[u^0]=\min_u \tilde{I}, \tag{3.2}$$

в котором функции τ, f_0, f_1 удовлетворяют неравенствам

$$\tau(z)\equiv\varrho(a^1);\quad \varrho(u)\equiv\max_{\xi}(\xi_0 u),\quad \nu(\xi)=1;\quad \varrho>0,\quad u\neq 0,$$

$$f_0(h)\geqslant g_1(h)\equiv\nu^0\,\partial f_1/\partial\nu^0-f_1(h,\nu^0)>0,$$

$$f_1(h,0)\equiv 0,\quad (\partial f_1/\partial\nu)\,|_{\nu=0}\geqslant 0,\quad \partial^2 f_1/\partial\nu^2>0,$$

$$f_0,\ f_1\subset C_2[h\geqslant 0,\ \nu\geqslant 0].$$

Если $h\to+\infty$ при $\|z\|\to\infty$, то N_0 ограниченно. Функция $\varrho(u)$ имеет все свойства сопряженной ей функции $\nu(u)$. Для гамильтониана (2.7) задачи (3.1), (3.2) экстремальны регулятор $u^0(z)$ и функция Беллмана $V(h)$ при $\nu^0\psi(h)\equiv f_1(h,\nu^0)+f_0(h)$; $a^1\equiv -B^{\mathrm{T}}b\neq 0$, $p\neq 0$ вида

$$u^0(z)\equiv\nu^0\,\partial\varrho/\partial a^1,\quad \forall z\in N_0\backslash\{p=0\};\quad V\equiv\int\limits_0^h\psi(s)\,ds;\quad \|N_0\|<\infty, \tag{3.3}$$

где $u^0(z)\equiv 0$, $\forall z\in N_0\cap\{p=0\}$; $\varrho(u)\equiv\max\limits_{v}(u\cdot v)$ при $\nu(v)=1$.

В силу (3.1) для $\forall z\in N_0$; $\|N_0\|<\infty$, $u=u^0(z)$ (3.3) имеем

$$\dot{h}=-\nu^0 a^1\cdot\partial\varrho/\partial a^1=-\nu^0\varrho(a^1)\leqslant 0;\quad \varrho=0\leftrightarrow p=0;\quad \dot{p}\neq 0,\quad p=0,\quad q\neq 0.$$

Обобщая на (3.2) результаты [8], из принципа инвариантности [1, 8, 16] находим, что регулятор (3.3) дает асимптотическую устойчивость $z \equiv 0$ при $\forall z_0 \equiv z(t_0) \in N_0$, $\|N_0\| < \infty$. Аналогично [2, 4, 5, 16] из результатов раздела и замечания 1 следует, что $u^0(z)$ (3.3) — оптимальный по (3.2) регулятор асимптотической стабилизации покоя (3.1). Если $h \to \infty$ при $\|z\| \to \infty$ $(\forall \|N_0\| < \infty)$, то (3.3) дает оптимальную стабилизацию в целом. Аналогичные утверждения верны для стационарной системы (1.7) с отрицательно определенной функцией $U_{(q)}$, $q \in E^n$, если (3.2) — критерий оптимальности, а управление u ограничено по норме: $0 \leqslant \nu(u) \leqslant \nu^0 = \text{const}$.

Заключение

Здесь на основе полуобратного способа [9], в отличие от известных способов [2–5, 8], проблема (1.5)—(1.7) оптимальной стабилизации стационарно неустойчивого движения системы класса (1.1)—(1.3) Гамильтона сведена к решению линейного $(2n+1)$-мерного уравнения Беллмана (2.14) методом характеристик (2.15), (2.16). В результате найдены неотрицательная функция компенсации Q (2.10), линейный по p-компоненте градиента функции Беллмана оптимальный регулятор (2.17), а для замкнутой им системы (1.1)—(1.3) предложены условия асимптотической (2.20) и экспоненциальной (2.21) стабилизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М., Наука, 1967.
2. *Красовский Н. Н.* // Теория устойчивости движения. Доп. 4. М., Наука, 1966, 475—514.
3. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М., Наука, 1969.
4. *Румянцев В. В.* // ПММ, 1970, **34**, вып. 3, 440—456.
5. *Румянцев В. В.* // ПММ, 1972, **36**, вып. 6, 966—976.
6. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд. АН СССР, 1962.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., Наука, 1966.
8. *Singh, S. N.* // Trans. ASME. J. Dynam. Syst., Measurement and Contr., 1982, **104**, 27—32.
9. *Krasovsky, A. A.* // Automatica, 1971, **7**, 45—50.
10. *Кейс И. А.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1980, **29**, № 2, 150—159.
11. *Яров-Яровой М. С.* // ПММ, 1963, **27**, вып. 6, 973—987.
12. *Ульм С. Ю.* Методы декомпозиции для решения задач оптимизации. Таллинн, Валгус, 1979.
13. *Rohrer, R. A., Director, S. W.* Introduction to Systems Theory. New York, McGraw-Hill Book Company, 1972.
14. *Kleinman, D. K., Athans, M.* // IEEE Trans. Automat. Contr., 1968, **13**, № 2, 150—159.
15. *Meditch, J. S.* // IEEE Trans. Automat. Contr., 1966, **11**, № 3, 433—439.
16. *Hahn, W.* Stability of Motion. New York, Springer-Verlag, 1967.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
27/XII 1988

Igor KEIS

HAMILTONI SÜSTEEMI LIIKUMISE OPTIMAALNE STABILISEERIMINE POOLPÖÖRDMEETODI ABIL

On vaadeldud naturaalkriteeriumiga (1.6) optimaalse Hamiltoni süsteemi liikumise (1.1) stabiliseerimise probleemi (1.7), (2.5). Stabiilsusteooria meetodite [1–6, 16] ning optimeerimise poolpöördmeetodi [19] abil on leitud optimaalse regulaatori (2.17) esitus algsüsteemi liikumise (1.1) stabiliseerimiseks kooskõlas piisavate kriteeriumidega (2.20), (2.21).

Igor KEIS

ON THE OPTIMAL STABILIZATION OF THE HAMILTON SYSTEM VIA SEMI-INVERSE METHOD

The problem of the optimal asymptotic and exponential stability of the Hamilton system (1.1) motion is investigated in the paper. Here natural criterion (1.6) is chosen as the optimality performance index. The stabilization is provided by the additional forces linear in controls and the gain matrix (1.7) depending on the state vector.

The problem (1.7), (2.5) is solved on the basis of the theory of the stability of the motion [1–6, 16] together with A. A. Krasovsky semi-inverse method [9].

As a result, the design of the optimal control (2.17) and sufficient conditions for the asymptotic (2.20), exponential (2.21) stability of the optimal Hamilton system (1.7), (2.5) are obtained. As by-product of the paper, optimal controls (3.3) are provided for the stabilization of the stationary system (3.1) equilibrium.