Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1900, 39, № 1, 14—25
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.1.03

УДК 656.13: 519

ЮРИ КАЯРИ

ПРИМЕНЕНИЕ СМЕЩЕННОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕРЕГУЛИРУЕМОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОДНОРЯДНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

(Представил Х. Абен)

Определение характеристики очереди автомобилей, ожидающих возможности выезда на главную дорогу у стоп-линии второстепенной дороги, является одной из центральных задач теории транспортных потоков, решение которой имеет большое практическое значение. Они зависят от целого ряда факторов, начиная с психологии водителя и кончая геометрией перекрестка. Среди этих факторов наиболее существенными являются: количество полос движения на главной и второстепенной дорогах — рядность движения; интенсивность транспортных потоков, взаимодействующих на перекрестке; вероятностное распределение временных интервалов между последовательными автомобилями в потоке; минимальный интервал в главном потоке, необходимый для ожидающего на стоп-линии для выезда на главную дорогу. В соответствии с учитываемыми факторами и определяемыми характеристиками очереди получаются разные постановки задачи, различающиеся как по математической сложности их решения, так и по адекватности описания реальной обстановки.

Впервые задачу о переходе улицы пешеходами рассматривал в 1936 г. В. Ф. Адамс [1]. В 1940 г. Ф. Гарвуд [2] анализировал уже движение одиночного автомобиля. Эти две задачи, по существу, одинаковы, поскольку задержка одиночных автомобилей, как и пешеходов, переходящих улицу в одной группе, не связана с задержкой других автомобилей, образующих очередь.

Решение возникших здесь проблем существенно зависит от решения фундаментальной задачи транспортных потоков — о распределении временных интервалов между последовательными автомобилями в потоке. Этой теме посвящено большое количество работ (напр., [3], 67—76; [4], 90—96; [5], 38—39; [6], 165; [7], 21—31), в которых для описания распределения случайного интервала используется целый ряд распределений, начиная с более простых — экспоненциальных и смещенных экспоненциальных распределений и кончая комбинациями двух-трех распределений.

Решение задачи, естественно, зависит и от типа пересечения — регулируемое (светофором) или нерегулируемое (главная—второстепенная дорога, круговое движение). В литературе уделяется большое внимание регулируемым пересечениям, нерегулируемые пересечения рассматриваются сравнительно реже и, как правило, только с точки зрения пропускной способности (напр., [3], 117—120; [8, 9]).

Следует отметить, что все аналитические формулы (математически строго обоснованные), описывающие нерегулируемое пересечение потоков, получены до сих пор на основе экспоненциального распределения или распределения Эрланга. Остальные же формулы получены при помощи упрощенных предложений, часто сделанных по умолчанию.

В настоящей работе рассматривается абстрактное нерегулируемое одностороннее, однорядное пересечение транспортных потоков. Главный поток описывается смещенным экспоненциальным распределением, второстепенный — экспоненциальным распределением. Как будет показано, такое различие в описании потоков не искажает действительного положения.

Математически строго выводятся формулы для расчета таких характеристик пересечения, как пропускная способность, длина очереди, время задержки и др.

1. Постанока задачи

Рассмотрим нерегулируемое пересечение главной и второстепенной дорог как одноканальную систему массового обслуживания, элементами которой являются: входящий поток — однорядный второстепенный поток автомобилей и обслуживающее устройство — реальная или мнимая стоп-линия на второстепенной дороге, перед которой проезжают беспрепятственно автомобили главного потока в одном ряду.

Основными показателями системы являются:

1) Время обслуживания — время, в течение которого стоп-линия занята одним автомобилем, состоящее из двух промежутков

$$u = d + d_0, \tag{1}$$

где d — случайный промежуток времени простоя на стоп-линии в ожидании подходящего момента для совершения желаемого маневра, например, вхождения в главный поток, d_0 — продолжительность совершения этого маневра, например, правого поворота. Предположим, что d_0 является постоянной, одинаковой для всех автомобилей второстепенного потока.

2) Число требований, находящихся в системе, n — число автомобилей, оставшихся на пересечении в тот момент, когда обслуженный автомобиль освобождает стоп-линию.

3) Время пребывания в системе, v — время ожидания выезда на стоп-линию плюс время обслуживания.

Разумеется, перечисленные показатели u, n и v являются случайными величинами.

Задача заключается в определении средних значений показателей системы массового обслуживания исходя из заданных вероятностных распределений временных интервалов между автомобилями в главном и второстепенном потоках.

2. Основные формулы

Предположим, что входящий поток является пуассоновским с интенсивностью λ. Тогда временные интервалы t между последовательными автомобилями второстепенного потока имеют экспоненциальное распределение

$$R(t < X) = \begin{cases} 0, & \text{если } X \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } X > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим еще, что временные интервалы t между последовательными автомобилями главного потока имеют смещенное (на τ единиц направо) экспоненциальное распределение

$$P(t < X) = \begin{cases} 0, & \text{если } X \leqslant \tau \\ 1 - e^{-\alpha(X-\tau)}, & \text{если } X > \tau \end{cases} \tag{3}$$

где τ — минимальное значение случайной величины t $(t \geqslant \tau)$, а $\alpha = (\mu^{-1} - \tau)^{-1}$ и μ — интенсивность главного потока. В таком случае супремум интенсивности главного потока $\mu^* = \tau^{-1}$.

Для решения постановленной задачи исходим из трех формул ([10], 68, 236), описывающих одноканальную систему массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком, интенсивность которого λ, и произвольно распределенным временем обслуживания u со средним $E(u)$ и дисперсией $D(u)$

$$E(v) = \frac{\lambda D(u) + 2E(u) - \lambda E^2(u)}{2[1 - \lambda E(u)]}, \tag{4}$$

$$E(n) = \lambda E(v), \tag{5}$$

$$\omega = 1 - \lambda E(u). \tag{6}$$

Формула (4), известная под названием формулы Поллачека—Хинчина, определяет среднее время пребывания в системе $E(v)$, включая время обслуживания.

Формула (5) определяет среднее число требований $E(n)$, находящихся в системе.

Формула (6) определяет вероятность ω того, что в произвольный момент в системе не находится ни одного требования — обслуживающее устройство является свободным.

Естественно, эти формулы справедливы для стационарного режима работы системы, когда $\lambda E(u) < 1$.

Определим теперь пропускную способность λ^* обслуживающего канала при заданном среднем времени обслуживания $E(u)$ как супремум интенсивности входящего потока стационарного режима

$$\lambda^* = \frac{1}{E(u)}, \tag{7}$$

т. е. при входящем потоке с интенсивностью λ^* или больше время ожидания и длина очереди начнут безгранично возрастать.

Таким образом, поставленная задача приводится к нахождению характеристик времени обслуживания $E(u)$ и $D(u)$, которые зависят от распределения временных интервалов между последовательными автомобилями главного потока.

В теории транспортных потоков имеются формулы для вычисления $E(u)$ и $D(u)$, если временные интервалы между последовательными автомобилями главного потока распределены по экспоненциальному или эрланговскому распределению ([6], 169). Однако, следует отметить, что эти, наиболее простые, распределения представляют собой удовлетворительную модель для описания потока небольшой интенсивности, а при высокой интенсивности движения значения, предсказываемые с их помощью, отличаются от реально наблюдаемых ([3], 74, [4], 91, [6], 142). Поэтому, для решения практических проблем, возникающих именно при интенсивных потоках, необходимо применять более точное описание транспортного потока.

Очевидно, что интервалы между последовательными автомобилями не могут быть бесконечно малыми, как это предсказывают экспоненциальное и эрланговское распределения. Этот главный их недостаток все отчетливее проявляется при повышении интенсивности потока, когда увеличивается частота появления очень малых интервалов, за счет которых в потоке остается увеличенное количество весьма длительных интервалов. В этом смысле смещенное экспоненциальное распределение (3), рассматриваемое в данной статье, описывает однорядный транспортный поток гораздо точнее ([6], 142). Здесь предполагается, что временной интервал между последовательными автомобилями не может быть меньше τ, откуда следует, что интенсивность потока не может превышать величины τ^{-1}, а при приближении интенсивности к максимальной величине поток стремится к детерминированному с интервалами τ.

Для определения характеристик времени обслуживания $E(u)$ и $D(u)$, соответствующих смещенному экспоненциальному распределению, воспользуемся аппаратом производящих функций факториальных моментов (п. ф. ф. м.). П. ф. ф. м. $\gamma_x(s)$ случайной величины X однозначно определяется по функции распределения $F(x)$ интегралом Стильтьеса

$$\gamma_x(s)=\int_{-\infty}^{\infty} s^x\,dF(x), \tag{8}$$

а если X — непрерывная случайная величина, то интегралом Римана

$$\gamma_x(s)=\int_{-\infty}^{\infty} s^x\varphi(x)\,dx, \tag{9}$$

где $\varphi(x)=F'(x)$ — плотность распределения вероятностей.

Очевидно, что область определения функции $\gamma_x(s)$ совпадает с областью суммируемости функции s^x.

Рассмотрим сначала подробнее составные части времени простоя d, введенного в (1), затем найдем его п. ф. ф. м. и, наконец, с помощью последней определим искомые $E(u)$ и $D(u)$.

3. Время простоя

Уточним понятие времени простоя d. Для определенности рассмотрим слияние второстепенного потока в главный поток (правый поворот). Будем считать, что автомобиль A, выезжающий на стоп-линию второстепенной дороги, сразу же совершает правый поворот и вливается в главный поток, если очередной автомобиль главного потока прибывает на перекресток не раньше, чем через T сек. В противном случае автомобиль A останавливается на стоп-линии для ожидания временного интервала между автомобилями главного потока не меньшего T сек, а при появлении такового совершает правый поворот.

Предположим, что величина T складывается из времени d_0, требуемого для совершения правого поворота (см. (1)) и минимального временного интервала τ, который должен остаться в главном потоке между вливающимся автомобилем A и следующим автомобилем главного потока (см. (3))

$$T=d_0+\tau. \tag{10}$$

Естественно считать $d_0\geqslant\tau$.

Определим теперь время простоя d выражением

$$d=\begin{cases}0, & \text{если } t'\geqslant T,\\ t'+t_1+\ldots+t_k, & \text{если } t',\ t_1,\ \ldots,\ t_k<T \text{ и } t_{k+1}\geqslant T,\end{cases} \tag{11}$$

где t' — промежуток времени от момента прибытия автомобиля A на стоп-линию до момента прибытия очередного автомобиля главного потока на перекресток, назовем это время остатком данного интервала главного потока; $t_1, \ldots, t_{k+1}$ — последовательные интервалы между автомобилями главного потока.

Находим плотности распределения случайных величин, входящих в определение (11).

Очевидно, интервалы $t_1, \ldots, t_k$ имеют одинаковую усеченную плотность $p_T(X)\equiv p(t<X/t<T)$ при условии $t<T$. Исходя из (3), получим по определению усеченной плотности

$$p_T(X)=\begin{cases}0, & \text{если } X\leqslant\tau,\\ \alpha P^{-1}e^{-\alpha(X-\tau)}, & \text{если } \tau<X<T,\\ 0, & \text{если } X\geqslant T,\end{cases} \tag{12}$$

где $P=P(t<T)=1-e^{-\alpha(T-\tau)}$.

Основные математические трудности применения смещенного экспоненциального распределения возникают при определении плотности распределения остатка t'. Заметим, что при экспоненциальном распределении интервала остаток имеет то же самое распределение, но в данном случае это не так.

Здесь мы должны различать два условия: 1) автомобиль A прибывает прямо на свободную стоп-линию и 2) автомобиль A выезжает на стоп-линию из очереди, по крайней мере, только со второго места. Пропуская подробности вывода, отметим, что, исходя из (3), несложно получить условную функцию распределения остатка t' при первом условии (напр., [11], 122)

$$Q_1(t'<X)=\begin{cases}0, & \text{если } X\leqslant 0,\\ \mu X, & \text{если } 0<X\leqslant\tau,\\ 1-(1-\mu\tau)\,e^{-\alpha(X-\tau)}, & \text{если } X>\tau\end{cases} \tag{13}$$

а учитывая еще (10), также условную функцию распределения остатка t' при втором условии

$$Q_2(t'<X)=\begin{cases}0, & \text{если } X\leqslant\tau,\\ 1-e^{-\alpha(X-\tau)}, & \text{если } X>\tau.\end{cases} \tag{14}$$

Распределение (13) выражает, между прочим, то обстоятельство, что по прибытии на свободную стоп-линию остаток t' может быть сколь угодно малым. А из (14) видно, что при выезде на стоп-линию из очереди, остаток t' всегда больше τ. Действительно, автомобиль, который находится на стоп-линии, уходит оттуда как только до прибытия автомобиля главного потока остается не менее T секунд, а через d_0 секунд после ухода первого на стоп-линию выезжает второй автомобиль и теперь, согласно (10), в течение τ секунд на перекрестке не появляется атомобиль главного потока. Заметим еще, что при выезде из очереди распределение (14) остатка t' совпадает с распределением (3) всего интервала t.

Безусловное распределение остатка t' выражается через условные распределения Q_1 и Q_2 по формуле полной вероятности в виде

$$Q(t'<X)=\omega Q_1(t'<X)+(1-\omega)\,Q_2(t'<X), \tag{15}$$

где ω — вероятность выполнения первого условия, а $1-\omega$ — вероятность выполнения второго условия.

Сейчас вероятность ω прибытия автомобиля A на свободную стоп-линию является для нас неизвестной и поэтому рассмотрим ее пока что как неопределенный параметр.

Продифференцировав (15) по X и производя необходимую нормировку, получим наконец искомую усеченную плотность $q_T(X)\equiv\equiv q(t'<X/t'<T)$ случайной величины t' при условии $t'<T$:

$$q_T(X)=\begin{cases}0, & \text{если } X\leqslant 0,\\ Q^{-1}\omega\mu, & \text{если } 0<X\leqslant\tau,\\ \alpha Q^{-1}(1-\omega\mu\tau)\,e^{-\alpha(X-\tau)}, & \text{если } \tau<X\leqslant T,\\ 0, & \text{если } T<X,\end{cases} \tag{16}$$

где $Q=Q(t'<T)=1-(1-\omega\mu\tau)\,e^{-\alpha(T-\tau)}$.

Теперь, имея плотности распределения p_T и q_T слагаемых t_i и t', из которых складывается время простоя d, можно вычислить его п. ф. ф. м.

4. П. ф. ф. м. времени простоя

Пусть, как и в предыдущем пункте, $P=P(t<T)$ и $Q=Q(t'<T)$, тогда вероятность того, что $t'\geqslant T$ равна $1-Q$, а вероятность того, что $t'<T$ равна Q. Поскольку случайная величина d принимает значение $d=0$ при условии $t'\geqslant T$ и значение $d>0$ при условии $t'<T$ с соответствующими условными функциями распределения $F_1(X)\equiv F_1(d\leqslant X/ /t'\geqslant T)$ и $F_2(X)\equiv F_2(d\leqslant X/t'<T)$, то ее безусловная функция распределения $F(X)\equiv F(d\leqslant X)$ выражается через F_1 и F_2 по формуле полной вероятности в виде:

$$F(X)=(1-Q)F_1(X)+QF_2(X), \tag{17}$$

где $F_1(X)$ ступенчатая функция

$$F_1(X)=\begin{cases}0, \text{ если } X<0,\\ 1, \text{ если } X\geqslant 0,\end{cases} \tag{18}$$

а $F_2(X)$ некоторая неизвестная нам непрерывная функция распределения случайной величины $\Delta=t'+t_1+\ldots+t_k$, так как при $t'<T$ время простоя $d=\Delta$.

Исходя теперь из (17), получим, согласно определению (8), п. ф. ф. м. $\gamma_d(s)$ случайной величины d

$$\gamma_d(s)=(1-Q)+Q\int_{-\infty}^{\infty}s^x F'_2(x)\,dx, \tag{19}$$

где учтены конкретный вид функции F_1 и непрерывность F_2. Последний интеграл, согласно (9), представляет собой п. ф. ф. м. $\gamma_\Delta(s)$ случайной величины Δ. Но поскольку функция F_2 нам неизвестна, то определим $\gamma_\Delta(s)$ непосредственно по найденным плотностям p_T и q_T слагаемых t_i и t' величины Δ.

Обозначим $\Delta=t'+\delta$, где $\delta=t_1+\ldots+t_k$ так, что Δ состоит из суммы двух независимых случайных величин $t'<T$ и δ, которая, в свою очередь, состоит из суммы случайного количества k одинаково распределенных величин $t_1, \ldots, t_k<T$.

При определении $\gamma_\Delta(s)$ воспользуемся следующими свойствами п. ф. ф. м.: 1) для суммы двух независимых случайных величин $\gamma_\Delta(s)= =\gamma_{t'}(s)\gamma_\delta(s)$, где $\gamma_{t'}(s)$ и $\gamma_\delta(s)$ п. ф. ф. м. случайных слагаемых t' и δ; 2) для суммы случайного количества одинаково распределенных величин $\gamma_\delta(s)=\gamma_k(\gamma_t(s))$, где $\gamma_k(s)$ — п. ф. ф. м. случайного количества $k=0, 1, \ldots$ слагаемых и $\gamma_t(s)$ — п. ф. ф. м. самих слагаемых.

Согласно определению (9), по плотностям (16) и (12) усеченных случайных величин $t'<T$ и $t<T$ получим

$$\gamma_{t'}(s)=\frac{\omega\mu(s^\tau-1)}{Q\ln s}+\frac{\alpha[(1-Q)s^T-(1-\omega\mu\tau)s^\tau]}{Q(\ln s-\alpha)} \tag{20}$$

и

$$\gamma_t(s)=\frac{\alpha[(1-P)s^T-s^\tau]}{P(\ln s-\alpha)}. \tag{21}$$

Находим также п. ф. ф. м. $\gamma_k(s)$ случайного количества $k=0, 1, \ldots$ слагаемых. Очевидно, вероятности p_k того, что $t_1, \ldots, t_k<T$ и $t_{k+1}\geqslant T$ вычисляются по формуле

$$p_k=P^k(1-P), \quad k=0, 1, \ldots, \tag{22}$$

а, как частный случай определения (8), п. ф. ф. м. дискретной случайной величины k имеет вид:

$$\gamma_k(s)=\sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k=(1-P)\sum_{k=0}^{\infty}(sP)^k=\frac{1-P}{1-sP}, \tag{23}$$

если только этот бесконечный ряд сходится в некоторой окрестности точки $s=1$. Но поскольку сумма бесконечной геометрической прогрессии сходится при $sP<1$, а вероятность $P<1$, то последнее условие выполнено.

Так как $\gamma_\Delta(s)=\gamma_{t'}(s)\gamma_k(\gamma_t(s))$ и $\gamma_d(s)=(1-Q)+Q\gamma_\Delta(s)$, то выполняя необходимые подстановки, получим после несложных преобразований искомую п. ф. ф. м. $\gamma_d(s)$ времени простоя d

$$\gamma_d(s)=\frac{\ln s-\alpha}{\ln s-\alpha\left[(1-P)s^T-s^T+1\right]}\left[(1-Q)+(1-P)\frac{\omega\mu(s^\tau-1)}{\ln s}\right] \tag{24}$$

При помощи $\gamma_d(s)$ можно теперь определить все необходимые характеристики времени обслуживания.

5. Характеристики времени обслуживания

Время обслуживания u, определенное по (1), состоит из суммы случайной величины d и постоянной d_0. Поэтому среднее и дисперсия величины u выражаются в виде:

$$E(u)=E(d)+d_0, \quad D(u)=D(d), \tag{25}$$

где $E(d)$ и $D(d)$ вычисляются по известным формулам при помощи первой и второй производной п. ф. ф. м. (24)

$$E(d)=\gamma'_d(1), \quad D(d)=\gamma''_d(1)-E(d)\left[E(d)-1\right]. \tag{26}$$

Выполняя необходимые вычисления и учитывая, что $T=\tau+d_0$, имеем:

$$E(u)=\frac{1}{2}\omega\mu\tau^2+\mu^{-1}(A-1), \tag{27}$$

где для краткости записи введено обозначение $A=(1-P)^{-1}=e^{\alpha(\tau-\tau)}$.

Заметим, что в данной постановке задачи величины μ, τ и T, входящие в (27), считаются заданными, а вероятность ω, введенная в (15), до сих пор рассматривалась как неопределенный параметр. Для определения вероятности ω того, что автомобиль второстепенного потока прибывает на свободную стоп-линию, обратимся к формуле (6), определяющей ω через среднее время обслуживания $E(u)$. Подстановкой (27) в (6) получим линейное уравнение относительно ω, решение которого дает

$$\omega=\frac{1-\dfrac{\lambda}{\mu}(A-1)}{1+\dfrac{1}{2}\lambda\mu\tau^2}, \tag{28}$$

где все величины, включая λ, на правой стороне равенства являются заданными.

Чтобы найти дисперсию $D(u)$, вычислим вторую производную $\gamma_d(s)$ при $s=1$ и с помощью формулы (26) после простых, но довольно трудоемких преобразований получим

$$D(u)=\left(-\frac{1}{4}\omega^2\mu^2\tau^2+\frac{1}{3}\omega\mu\tau+A-1\right)\tau^2+$$
$$+\mu^{-2}[A^2-2\mu(AT-\tau)-1]. \qquad (29)$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{\mu\to 0} E(u)=d_0 \quad \text{и} \quad \lim_{\mu\to 0} D(u)=0, \qquad (30)$$

откуда для случая, когда отсутствует поток автомобилей на главной дороге $\mu=0$ получим пропускную способность второстепенной дороги $\lambda^*=d_0^{-1}$ и вероятность $\omega=1-d_0\lambda$.

Приведем здесь еще формулы расчета $E(d)$ и $D(d)$, выведенные в монографии Д. Дрю ([6], 169) для экспоненциального распределения временных интервалов между последовательными автомобилями в главном потоке

$$E(d)=\mu^{-1}(e^{\mu T}-1-\mu T),$$
$$D(d)=\mu^{-2}(e^{2\mu T}-2\mu Te^{\mu T}-1), \qquad (31)$$

где μ и T имеют тот же смысл, что и у нас.

Очевидно, при $\tau=0$ смещенное экспоненциальное распределение (3) сводится к экспоненциальному распределению с интенсивностью μ. Приравнивая для проверки в (27) и (29) $\tau=0$ с учетом (25), получим, как и следовало ожидать, формулы (31).

Нетрудно заметить принципиальное различие между формулами, определяющими характеристики времени простоя $E(d)$ и $D(d)$ на основе смещенного экспоненциального распределения (27), (29) и на основе экспоненциального распределения (31), заключающееся в том, что в первом случае эти характеристики зависят через вероятности ω (28) от интенсивности второстепенного потока λ, а во втором случае не зависят.

6. Показатели системы массового обслуживания

Наконец, по только что выведенным и вначале изложенным основным формулам, на основе исходных данных λ, μ, τ, T можно вычислить все главные показатели рассматриваемой системы массового обслуживания. Перечислим эти показатели в порядке их вычисляемости:

1) вероятность прибытия на свободное обслуживающее устройство (стоп-линию) ω (28),
2) среднее значение времени обслуживания $E(u)$ (27),
3) дисперсия времени обслуживания $D(u)$ (29),
4) среднее время пребывания в системе $E(v)$ (4),
5) среднее число требований, находящихся в системе $E(n)$ (5),
6) пропускная способность обслуживающего устройства (стоп-линии) λ^* (7).

Относительно последнего показателя λ^* следует сделать одно замечание. Пропускная способность λ^* определяется по (7) через $E(u)$. Но как было отмечено уже выше, среднее $E(u)$ зависит от интенсивности λ. Таким образом, формула (7) представляет собой, по существу, уравнение $\lambda=[E(u)]^{-1}$ или, учитывая (6), $\omega=0$, решение которого

$$\lambda^*=\frac{\mu}{A-1} \qquad (32)$$

определяет пропускную способность прямо по исходным данным μ, τ и T. Непосредственно проверяется, что при $\mu\to 0$ пропускная способность $\lambda^*\to d_0^{-1}$.

Вычислим еще один показатель, который является специфическим для данной постановки задачи — среднее число проезжающих автомобилей. Под числом проезжающих автомобилей $m=0, 1, \ldots$ понимаем число автомобилей главного потока, проезжающих мимо автомобиля, находящегося на стоп-линии, начиная с момента его выезда на стоп-линию до момента его ухода оттуда.

Чтобы определить среднее значение $E(m)$ находим сначала п. ф. ф. м. $\gamma_m(s)$ дискретной случайной величины m. Для этого обозначим через p_i $(i=0, 1 \ldots)$ вероятность того, что число проезжающих автомобилей равно i, тогда

$$
\begin{aligned}
&p_0 = B(t' \geqslant T) = 1 - Q,\\
&p_1 = B(t' < T \text{ и } t_1 \geqslant T) = Q(1-P),\\
&\ldots\\
&p_i = B(t', t_1, \ldots, t_{i-1} < T \text{ и } t_i \geqslant T) = QP^{i-1}(1-P),\\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{33}
$$

откуда, аналогично выводу (23), получим

$$\gamma_m(s) = \sum_{m=0}^{\infty} s^m p_m = (1-Q) - Q\frac{s(1-P)}{1-sP}. \tag{34}$$

Затем, вычисляя производную $\gamma_m(s)$ при $s=1$ имеем:

$$E(m) = \gamma'_m(1) = Q(1-P)^{-1} = \omega\mu\tau + A - 1, \tag{35}$$

где, как и раньше, $Q = Q(t' < T) = 1 - (1-\omega\mu\tau)e^{-\alpha(T-\tau)}$, $P = P(t < T) = 1 - e^{-\alpha(T-\tau)}$ и $A = e^{\alpha(T-\tau)}$.

Чтобы получить представление о состоятельности полученных формул вычислим значения нескольких показателей на основе исходных данных, описывающих реальный перекресток.

7. Транспортные показатели пересечения при $\tau=2{,}4$ сек и $T=5{,}4$ сек

Вышеизложенные показатели системы массового обслуживания являются фактически также и транспортными показателями пересечения, если термины «требование» и «система» заменить терминами «автомобиль» и «перекресток». Следует лишь иметь в виду, что в транспортных расчетах интенсивности потоков и пропускная способность измеряются в единицах автомобилей в час (авт/ч), а временные промежутки в секундах. Поэтому необходимо перед выполнением расчетов по изложенным формулам обеспечить соизмеримость переменных преобразованием

$$\mu = \frac{M}{3\,600} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{\Lambda}{3\,600}, \tag{36}$$

а после выполнения расчетов вычислить

$$\Lambda(M) = 3\,600\lambda^* \tag{37}$$

где M — интенсивность главного потока, авт/ч, Λ — интенсивность второстепенного потока, авт/ч, $\Lambda(M)$ — пропускная способность второстепенной дороги при интенсивности главного потока M, авт/ч.

На рассматриваемом уровне абстракции все конкретные особенности перекрестка вложены в параметры τ (условия движения на главной дороге — состояние дорожного покрытия и т. п.) и T (условия движения на второстепенной дороге, через $d_0=T-\tau$ — геометрия перекрестка, видимость, уклон и т. п.).

Пусть $\tau=2{,}4$ сек и $T=5{,}4$ сек, тогда $d_0=3$ сек. При таких значениях параметров пропускная способность главной дороги равна $3\,600/2{,}4=1\,500$ авт/ч, а максимальная пропускная способность второстепенной дороги при отсутствии главного потока равна $3\,600/3=1\,200$ авт/ч. Эти численные значения соответствуют хорошим условиям передвижения на перекрестке.

Теперь при фиксированных τ и T все показатели транспортной ситуации на данном перекрестке определяются интенсивностями потоков M и Λ. Вычислим значения двух более распространенных показателей:
1) пропускную способность второстепенной дороги $\Lambda(M)$ и
2) время пребывания на перекрестке или время задержки на перекрестке $E(v)$,

в зависимости от M и Λ, исходя из: смещенного экспоненциального, экспоненциального, эрланговского с параметром $a=3$ распределений временных интервалов между последовательными автомобилями главного потока. При экспоненциальном и эрланговском распределении вычислим характеристики простоя $E(d)$ и $D(d)$ по формулам, данным в монографии Д. Дрю ([6], 169).

Результаты расчетов представлены в виде графиков на рис. 1 и 2.

8. Заключение

Взяв за критерий оценки состоятельности гипотез о распределении временных интервалов между последовательными автомобилями в транспортном потоке (смещенное, экспоненциальное, эрланговское) вычисленные показатели $\Lambda(M)$ и $E(v)$, можно по рис. 1 и 2 сделать следующие выводы.

Рассмотрим сначала кривую пропускной способности $\Lambda(M)$, полученную на основе смещенного экспоненциального распределения (рис. 1). Заметим, что краевые значения $\Lambda(0)=1\,200$ и $\Lambda(1\,300)=0$ являются весьма правдоподобными. В частности, при интенсивности главного потока $M=1\,300$ авт/ч средний интервал между автомобилями равен 2,8 сек. Если минимальный допустимый интервал $\tau=2{,}4$ сек, то, очевидно, появление в таком потоке интервала длительностью 5,4 сек, необходимого для вхождения в главный поток, крайне неверо-

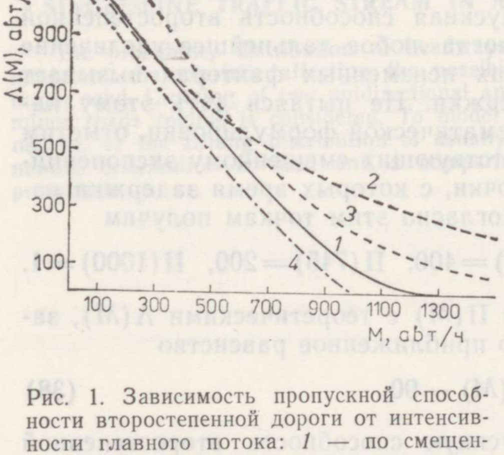

Рис. 1. Зависимость пропускной способности второстепенной дороги от интенсивности главного потока: *1* — по смещенному экспоненциальному распределению, *2* — по экспоненциальному распределению, *3* — по распределению Эрланга с $a=3$, *4* — практическая пропускная способность.

Рис. 2. Зависимость времени задержки (τ) от интенсивностей главного и второстепенного потока Λ: *1* — по смещенному экспоненциальному распределению, *2* — по экспоненциальному распределению.

ятное (при детерминированном потоке даже невозможное) событие и поэтому, естественно, $\Lambda(1\,300)=0$. Промежуточный ход кривой $\Lambda(M)$ также не вызывает существенных возражений.

Таким образом, судя по кривой $\Lambda(M)$, можно утверждать, что смещенное экспоненциальное распределение хорошо описывает поток автомобилей на всем диапазоне интенсивностей от 0 до 1 500 авт/ч. Вид соответствующих кривых (рис.2) времени задержки $E(v)$ тоже хорошо согласуется с этим утверждением.

Считая теперь кривые $\Lambda(M)$ и $E(v)$, соответствующие смещенному экспоненциальному распределению, состоятельными, видим из рис. 1 и 2, что экспоненциальное распределение описывает удовлетворительно поток с небольшой интенсивностью до 400—500 авт/ч. Однако при высокой интенсивности движения экспоненциальное, а также эрланговское распределение дают явно преувеличенные значения пропускной способности. Так, например, при $M=1\,500$, когда главный поток насыщен до предела, по этим распределениям предсказывается, что в главный поток могут войти с второстепенной дороги каждый час еще 200 или 57 автомобилей, что нереально.

Итак, рассмотренное описание главного потока с помощью смещенного экспоненциального, а второстепенного потока с помощью экспоненциального распределения не искажает действительного положения на перекрестке, поскольку, как правило, главный поток имеет высокую, а второстепенный более низкую интенсивность в силу своей второстепенности.

Наконец следует еще отметить, что пропускная способность второстепенной дороги $\Lambda(M)$, вычисленная по формуле (37), является «теоретической». Действительно, $\Lambda(M)$ определяет верхнюю границу для интенсивности второстепенного потока, при которой на перекрестке создается стационарный режим, т. е. средняя длина очереди и среднее время задержки конечны. Но, например, стационарный режим со средней длиной очереди 100 автомобилей и средним временем задержки 10 мин является явным затором, т. е. практически пропускная способность перекрестка уже исчерпана. Поэтому практическая пропускная способность $\Pi(M)$ значительно ниже теоретической $\Lambda(M)$ (см. также [1], 59, 134).

Приближенную оценку практической пропускной способности можно получить исходя из следующего определения, которое является аналогом определения пропускной способности дороги, данным Йоханнессоном в 1931 г. (см. [6], 94): пропускная способность второстепенной дороги достигается в тот момент, когда любое дальнейшее увеличение интенсивности движения при прочих неизменных факторах вызывает заметное увеличение времени задержки. Не пытаясь дать этому наглядному определению строгой математической формулировки, отметим крестиками на кривых $E(v)$, соответствующих смещенному экспоненциальному распределению (рис. 2), точки, с которых время задержки начинает «значительно» возрастать. Согласно этим точкам получим

$$\Pi(235)=800,\quad \Pi(400)=600,\quad \Pi(560)=400,\quad \Pi(745)=200,\quad \Pi(1000)=1.$$

Сравнивая полученные значения $\Pi(M)$ с теоретическими $\Lambda(M)$, заметим, что между ними имеет место приближенное равенство

$$\Pi(M)=\Lambda(M)-90, \tag{38}$$

определяющее практическую пропускную способность второстепенной дороги при $\tau=2{,}4$, $T=5{,}4$ и интенсивности главного потока M. Кривая с уравнением (38) изображена на рис. 1.

Обратим еще раз внимание на то, что все вышесказанное относится только к однорядному движению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Adams, W. F.* // J. Inst. civ. eng., 1936, 4, Now.
2. *Garwood, F.* // J. Roy. Stat. Soc. B, 1940, 7, 65.
3. Пропускная способность автомобильных дорог. (Сильянов В. В., Лобанов Е. М., Сапегин Л. А., Ситников Ю. М.) М., Транспорт, 1970.
4. *Сильянов В. В.* Теория транспортных потоков в проектировании дорог и организации движения. М., Транспорт, 1977.
5. *Иносэ Х., Хамада Т.* Управление дорожным движением. М., Транспорт, 1983.
6. *Дрю Д. Р.* Теория транспортных потоков и управление ими. М., Транспорт, 1972.
7. *Gazis, D. C., Edie, L. C., Helly, W., McNeil, D. R., Weiss, G. H.* Traffic Science. New York, John Wiley and Sons, 1974.
8. *Hothersall, D. C., Salter, R. J.* // Proc. Inst. civ. eng., Part 2, 1981, 71, Dec., 1149—1156.
9. *Plank, A. W., Catchpole, E. A.* Traffic Eng. and Control, 1984, 25, № 6, 327—329.
10. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М., Сов. радио, 1971.
11. *Хейт Ф.* Математическая теория транспортных потоков. М., Мир, 1966.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
19/IV 1989

Jüri KAJARI

NIHUTATUD EKSPONENTSIAALJAOTUSE KASUTAMINE ÜHEREALISE LIIKLUSVOO KIRJELDAMISEKS REGULEERIMATA RISTMIKEL

Üks tähtsamaid kõrvalteelt peateele väljasõiduvõimalusi ja peatee ületamist mõjutavaid karakteristikuid on peatee liiklusvoo sõidukitevaheliste intervallide tõenäosusjaotus. Artiklis on käsitletud olukorda, kus pea- ja kõrvalteena ristuvad kaks ühesuunalist ja üherealist liiklusvoogu. Sellise situatsiooni kirjeldamiseks on enamasti kasutatud lihtsalt eksponentsiaal- või Erlangi jaotust. Autor on selle probleemi modelleerimiseks rakendanud nihutatud eksponentsiaaljaotust ja võrrelnud seda teiste kirjeldamisviisidega.

Jüri KAJARI

USING DISPLACED EXPONENTIAL DISTRIBUTION IN DESCRIBING SINGLE-LINE TRAFFIC STREAM IN AN UNCONTROLLED INTERSECTION

The probability distribution of headways in the major road traffic stream is an important characteristic affecting the possibilities of minor road exit or crossing the major road. Crossing of two unidirectional and single-line streams in the «major road — minor road» regime is considered. To model this kind of a situation, the simple exponential, or the Erlang distribution is usually used. In this paper the displaced exponential distribution is used and a comparison with other ways of description is presented.