

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1989.1.14>

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.  
FÜSIKA \* MATEMAATIKA

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА \* МАТЕМАТИКА

PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.  
PHYSICS \* MATHEMATICS

1989, 38, 1

УДК 532.517.4

А. БЕРЕЗОВСКИЙ, Ф. КАПЛАНСКИЙ

### О ВЛИЯНИИ ПЛАВУЧЕСТИ НА ДИФФУЗИЮ ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА

A. BEREZOVSKI, F. KAPLANSKI. TÕSTEJOUUDE MOJU RINGKEERISE DIFUSIOONILE

A. BEREZOVSKI AND F. KAPLANSKI. ON INFLUENCE OF BUOYANCY ON THE DIFFUSION OF VORTEX RING

(Представил Н. Алумяэ)

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в виде вихревого кольца при наложении на него плавучести. В этом случае уравнения, определяющие диффузию вихря и перенос тепла в цилиндрических координатах, представляются в виде [1]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (v\zeta) + \frac{\partial}{\partial x} (u\zeta) = \\ & = v \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{k\zeta}{r^2} \right] + g\beta \frac{\partial (T - T_\infty)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial x} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right], \quad (2)$$

$$-r^k \zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{k}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (3)$$

где  $v = -\frac{1}{r^k} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,  $u = \frac{1}{r^k} \frac{\partial \psi}{\partial r} + V(t)$ .

Здесь  $\zeta$  — завихренность;  $u, v$  — компоненты скорости в направлении координат  $x, r$  соответственно;  $V(t)$  — скорость вихревого кольца, равная  $\frac{dx_0(t)}{dt}$ , где  $x_0(t)$  — пройденное вихрем расстояние;  $T$  — температура;  $T_\infty$  — температура окружающей жидкости;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\beta$  — коэффициент температурного расширения;  $a$  — коэффициент теплопроводности;  $t$  — время. Значение  $k=1$  соответствует осесимметричному, а  $k=0$  — плоскому случаю.

Граничные условия задают локальность явления и его симметрию:

$$\psi, \zeta, (T - T_\infty) \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + r^2 \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$\psi = \zeta = \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0. \quad (5)$$

Рассматриваемое движение обладает инвариантом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (T - T_\infty) r^k dr dx = F_0 = \text{const}, \quad (6)$$

выражающим сохранение теплосодержания.

При использовании «квазиавтомодельных переменных»

$$\varrho = \frac{r}{L}, \quad \eta = \frac{x - x_0(t)}{L}, \quad \tau = \frac{R_0}{L}, \quad L = \sqrt{2\nu t} \quad (7)$$

и введении безразмерных величин:

$$\Phi = \frac{\psi}{\zeta_0 L^{k+2}}, \quad \omega = \frac{\zeta}{\zeta_0}, \quad \zeta_0 = At^{-\frac{k+2}{2}} t_0^{\frac{k}{2}}, \quad (8)$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} t^{\frac{k+2}{2}} t_0^{-\frac{k+2}{2}}.$$

Уравнения (1) — (2) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} -2 \left( \frac{k+2}{2} \right) \omega - \varrho \frac{\partial \omega}{\partial \varrho} - \eta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \tau \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( -\frac{1}{\varrho^k} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \omega \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\varrho^k} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \omega \right) \right] = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{k}{\varrho} \frac{\partial \omega}{\partial \varrho} - \frac{k\omega}{\varrho^2} + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \frac{\partial \theta}{\partial \varrho}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -2 \left( \frac{k+2}{2} \right) \theta - \varrho \frac{\partial \theta}{\partial \varrho} - \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \tau \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \\ + \text{Re} \left[ \frac{1}{\varrho^k} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^k} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varrho^2} + \frac{k}{\varrho} \frac{\partial \theta}{\partial \varrho} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (3) и граничные условия (4), (5) в новых переменных сохраняют свою форму. Определяющими параметрами сформулированной задачи являются числа Рейнольдса, Грасгофа и Прандтля

$$\text{Re} = \frac{\zeta_0 L^2}{\nu} = A_1 \tau^k,$$

$$\text{Gr} = \frac{g\beta(T_0 - T_\infty)L^3}{\nu^2} t^{-\frac{k+2}{2}} t_0^{\frac{k+2}{2}} = A_2 \tau^{k-1}, \quad (11)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}; \quad A_1, A_2 = \text{const}.$$

Решение сформулированной задачи будем искать в виде асимптотических разложений относительно Re как малого параметра:

$$\begin{aligned} \theta(\varrho, \eta, \tau; \text{Re}) &= \theta_0(\varrho, \eta, \tau) + \text{Re} \theta_1(\varrho, \eta, \tau) + \dots, \\ \omega(\varrho, \eta, \tau; \text{Re}) &= \omega_0(\varrho, \eta, \tau) + \text{Re} \omega_1(\varrho, \eta, \tau) + \dots, \\ \Phi(\varrho, \eta, \tau; \text{Re}) &= \Phi_0(\varrho, \eta, \tau) + \text{Re} \Phi_1(\varrho, \eta, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

для фиксированных  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\tau$ . Для  $Pr=1$  в нулевом приближении существует точное решение при  $Gr=0(Re)$

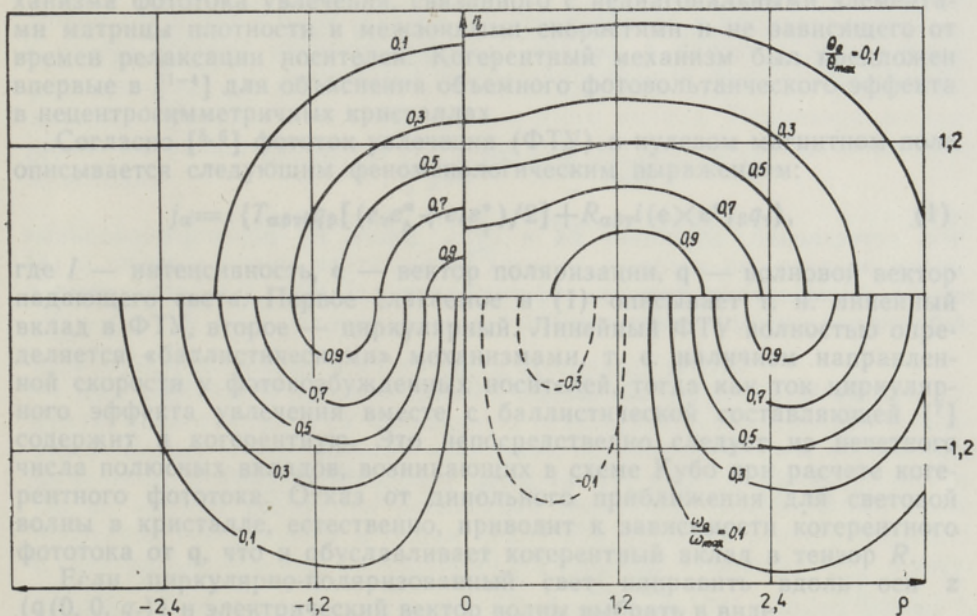
$$\theta_0 = e^{-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}} \operatorname{ch}(\rho\tau), \quad k=0,$$

$$\theta_0 = e^{-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}} I_0(\rho\tau), \quad k=1,$$

$$\omega_0 = e^{-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}} \operatorname{sh}(\rho\tau) - \frac{Gr}{2Re} \left[ (\rho - \tau) e^{-\frac{(\rho - \tau)^2}{2}} + (\rho + \tau) e^{-\frac{(\rho + \tau)^2}{2}} \right] e^{-\frac{\eta^2}{2}}, \quad k=0,$$

$$\omega_0 = e^{-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}} \left\{ I_1(\rho\tau) - \frac{Gr}{2Re} [\rho I_0(\rho\tau) - \tau I_1(\rho\tau)] \right\}, \quad k=1,$$

где  $I_0$ ,  $I_1$  — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка.



Распределение температуры и завихренности в поперечном сечении всплывающего вихревого кольца. Верхняя часть (слева направо) изолинии температуры при  $\tau=0,1$  и  $\tau=1,8$ , нижняя — соответствующие изолинии завихренности.

Это решение иллюстрирует рисунок, на котором приведены изолинии температуры и завихренности при  $k=1$  для двух значений  $\tau$ . При малых  $\tau$  описывается завершающая стадия развития всплывающего вихря. В этом предельном случае полученное решение совпадает с известным автомодельным [2-4] решением для термика (левая половина рисунка). Для предавтомодельной стадии (при достаточно больших  $\tau$ ) наблюдается качественное изменение картины течения: максимум температуры удаляется от оси симметрии, что сопровождается

появлением области отрицательной завихренности (правая половина рисунка). Аналогичное температурное распределение и вихревая структура отмечались при проведении численных расчетов полной задачи [5, 6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капланский Ф. Б., Эпштейн А. М. // ИФЖ, 1977, 33, № 4, 700—704.
2. Morton, B. R. // J. Fluid Mech., 1960, 17, Part 1, 107—118.
3. Капланский Ф. Б., Эпштейн А. М. // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1973, 22, № 4, 386—393.
4. Csanady, G. T. // J. Fluid Mech., 1965, 22, Part 2, 225—239.
5. Lilly, D. K. // J. Atmos. Sci., 1964, 21, 83—98.
6. Fox, G. D. // J. Atmos. Sci., 1971, 29, 322—341.

Институт термодинамики и электрофизики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
9/XI 1987

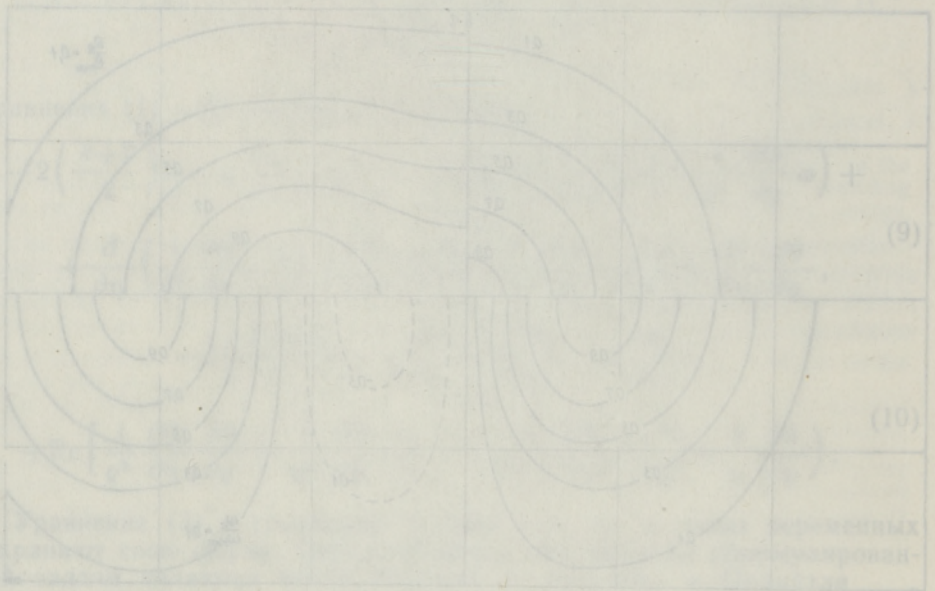


Рис. 9. Распределение температуры и завихренности в вихреобразующей области при  $t=0.1$ . Изометры температуры и завихренности. Масштаб:  $1 \text{ см} = 1 \text{ м}$ ,  $1 \text{ мкс} = 1 \text{ с}$ .

Это решение иллюстрирует рисунок на котором показаны изометры температуры и завихренности в вихреобразующей области при  $t=0.1$ . Изометры температуры и завихренности. Масштаб:  $1 \text{ см} = 1 \text{ м}$ ,  $1 \text{ мкс} = 1 \text{ с}$ .