

УДК 539.12

И. КАНАТЧИКОВ

## О СТРУННОЙ ПРИРОДЕ НЕЙТРИННОГО ПОЛЯ ВЕЙЛЯ

I. KANATTSIKOV. WEYL NEUTRIINOVALJA STRING-OLEMUSEST

I. KANATCHIKOV. ON THE STRINGY NATURE OF THE WEYL NEUTRINO FIELD

(Представил Х. Керес)

В работах по Гамильтон—Якобиевой (Г-Я) формулировке теории струн в четырех измерениях [1-6] была установлена связь между движением релятивистской струны и бивекторным полем  $f_{\mu\nu}$ , удовлетворяющим связям

$$f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}=\mu^2, \quad f^{\mu\nu}\tilde{f}_{\mu\nu}=0. \quad (1)$$

Наряду с этим в ряде работ [7-9] была отмечена эквивалентность спиноров Вейля и нулевых бивекторов, подчиняющихся связям (1) при  $\mu^2=0$ . Возникает вопрос, не является ли это указанием на тесную связь между бивекторным полем, образуемым движением струны, и бивекторным полем, соответствующим спинорному полю Вейля.

В этой работе мы получаем уравнения движения бивекторного поля нулевой струны [10]. Они эквивалентны уравнениям Рейфлера [11, 12] для нейтрино Вейля. Последние получаются из волнового уравнения Вейля в результате билинейного отображения Картана [7] из пространства спиноров в пространство изотропных комплексных векторов. Таким образом, уже на классическом уровне нулевая струна приводит к безмассовому фермионному полю (нейтрино Вейля), описываемому в терминах изотропного тензорного (комплексного векторного или бивекторного) поля.

Вернемся к связям (1). Интересующий нас случай  $\mu^2=0$  реализуется для бивекторного поля, связанного с движением нулевой струны. Действительно, согласно Каструпу [13], это поле на мировой поверхности струны  $x_\mu=x_\mu(v, \tau)$  пропорционально плюккеровым координатам  $v_{\mu\nu}=x'_\mu\dot{x}_\nu-x'_\nu\dot{x}_\mu$  касательных плоскостей в четырехмерном пространстве-времени, т. е.

$$f_{\mu\nu}(x(\sigma, \tau))=\lambda v_{\mu\nu}(\sigma, \tau). \quad (2)$$

Поскольку мировая поверхность нулевой струны в каждой своей точке касательна к проходящему через нее световому конусу, то  $v_{\mu\nu}v^{\mu\nu}=0$ , что и обеспечивает равенство  $\mu^2=0$  в (1).

Для продолжения определенного в (2) поля  $f_{\mu\nu}$  с мировой поверхности струны на включающую ее область в пространстве-времени можно или рассмотреть семейство мировых поверхностей струн, заполняющих эту область [4, 5, 14], или воспользоваться обобщенной теорией

Г-Я [2, 3, 6]. Оба подхода, конечно, связаны. Такое продолжение приводит к уравнениям движения связанного со струной бивекторного поля. К сожалению, использовать в случае нулевой струны обобщенную по Каратеодори теорию Г-Я мы не можем, так как для первой лагранжиан Шильда  $L_s = a v_{\mu\nu} v^{\mu\nu}$  равен нулю, а при этом формулы второй становятся сингулярными, поскольку содержат множители  $L^{-1}$  (см. обзор [6]). Применимость обобщенной по Де Дондеру—Вейлю [6] теории Г-Я, соответствующей подходу Намбу [1], также вызывает сомнения, так как она получается из теории Каратеодори как раз в противоположном к интересующему нас пределе  $L^{-1} \rightarrow 0$  [6].

Несмотря на это, мы предполагаем, что утверждение в [2, 13, 14] о том, что связанное с движением струны бивекторное поле  $f_{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнениям Максвелла с источником (ср. [4, 5])

$$\partial^\mu f_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu f_{\mu\nu} = j_\nu \quad (3)$$

остается в силе и для нулевых струн. Отметим, что в [2, 6] первое из уравнений (3) возникает как условие замкнутости обобщенной 2-формы Г-Я  $dS^1 \wedge dS^2 \sim f_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ , а второе вводится руками и интерпретируется как *определение* электрического тока, соответствующего конкретной конфигурации поля, образуемой движением струны.

При этом, как показывает рассмотренный в [13] пример, даже простейшему движению струны в виде вращающегося стержня соответствует довольно экзотическое для электродинамики распределение тока, коррелирующее как с движением струны, так и с потоком плотности энергии поля (см. (5)—(10) в [13]). Это, на наш взгляд, указывает на то, что источник в (3) не является внешним, а также тесно связан с движением струны и обусловлен им как само поле  $f_{\mu\nu}$ . Кроме того, поле  $f_{\mu\nu}$  (в отличие от электромагнитного) вследствие связей (1) принимает значения в нелинейном многообразии, а это, как известно, например, из киральных моделей [15], приводит к добавлению к уравнениям свободного (без связей) поля нелинейных членов самодействия или, иначе, эффективных источников, служащих для сохранения связей. Именно эту роль и призван играть источник  $j_\nu$  в (3), а следовательно, он должен представлять собой некоторую нелинейную комбинацию полей, которую необходимо найти. Замена внешних источников эффективным самодействием, обеспечивающим сохранение связей, делает теорию струнного бивекторного поля внутренне более самосогласованной.

В интересующем нас случае нулевого бивекторного поля связи  $f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = \tilde{f}_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = 0$  обладают дуальной инвариантностью и поэтому для их сохранения в (3) должны в общем случае присутствовать как электрические, так и магнитные источники. Вводя компоненты бивектора  $f_{\mu\nu}$

$$f_{0i} = \mathbf{E}_i, \quad f_{ij} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{H}_k, \quad (4)$$

записываем искомые уравнения в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \rho_e, \quad (5a)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{H} = \mathbf{g}, \quad \text{div } \mathbf{H} = \rho_m, \quad (5b)$$

где  $j_\nu(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  и  $g_\nu(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  — эффективные источники, обеспечивающие сохранение связей  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$  и являющиеся неизвестными нелинейными комбинациями полей. Для их определения в продифференцированные связи подставим выражения производных от полей

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E}_i &= (\text{rot } \mathbf{H})_i - j_i, & \partial_t \mathbf{H}_i &= g_i - (\text{rot } \mathbf{E})_i, \\ \partial_i \mathbf{E}_j &= \varepsilon_{ijk} g_k - \varepsilon_{ijk} \partial_t \mathbf{H}_k + \partial_j \mathbf{E}_i, & \partial_i \mathbf{E}_j &= \varepsilon_{ijk} j_k + \varepsilon_{ijk} \partial_t \mathbf{E}_k + \partial_j \mathbf{H}_i, \end{aligned} \quad (6)$$

полученные из уравнений (5). Это приводит к следующим соотношениям:

$$\partial_t(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{g} = 0, \quad (7)$$

$$\partial_t(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) = \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{g} = 0,$$

$$\nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) = \mathbf{H} \times \mathbf{g} + \mathbf{E} \times \mathbf{j} - \mathbf{H} \times \partial_t \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \partial_t \mathbf{E} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{H} = 0, \quad (8)$$

$$\nabla(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) = \mathbf{E} \times \mathbf{g} - \mathbf{H} \times \mathbf{j} - \mathbf{E} \times \partial_t \mathbf{H} - \mathbf{H} \times \partial_t \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = 0,$$

являющимися алгебраическими уравнениями для  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{g}$ . Система (7) — (8) переопределена и мы рассмотрим условия ее совместности. Умножая (8) скалярно на единичный вследствие связей вектор  $\mathbf{v} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} / E^2$ , получим

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbf{g} - \partial_t \mathbf{H} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{H})) - \mathbf{H} \cdot (\mathbf{j} + \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{E})) = 0,$$

$$\mathbf{H} \cdot (\mathbf{g} - \partial_t \mathbf{H} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{H})) + \mathbf{E} \cdot (\mathbf{j} + \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{E})) = 0.$$

Подставляя сюда  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{g}$  из (5), приходим к уравнениям

$$\mathbf{E} \cdot (\text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{H})) - \mathbf{H} \cdot (\mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{E}) + \text{rot } \mathbf{H}) = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{H} \cdot (\text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{H})) + \mathbf{E} \cdot (\mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{E}) + \text{rot } \mathbf{H}) = 0,$$

которые совместны с (7) при

$$\mathbf{j} = -\mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{E}), \quad \mathbf{g} = \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{H}). \quad (10a)$$

Теперь в качестве нулевых компонент токов естественно взять

$$q_e = \mathbf{v} \cdot (\partial_t \mathbf{E}), \quad q_m = \mathbf{v} \cdot (\partial_t \mathbf{H}). \quad (10б)$$

Отметим, что 4-векторный характер внешне нековариантных выражений для эффективных источников обеспечивается связями  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ .

Запишем уравнения (5), (10) в терминах изотропного вектора  $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$

$$\text{rot } \mathbf{F} - i\partial_t \mathbf{F} = -i\mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{F}), \quad \text{div } \mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot (\partial_t \mathbf{F}). \quad (11a, б)$$

Но это не что иное, как уравнения Рейфлера [11] для нейтринного поля Вейля! При этом уравнение (11б), не приведенное в [11], получается из (11a) скалярным умножением на  $\mathbf{v}$ .

Итак, бивекторное поле нулевой струны удовлетворяет тем же уравнениям, что и нейтринное поле в векторной теории Рейфлера (связь компонент бивектора и изотропного вектора определена в (4)). Это указывает на струнную природу нейтринного поля Вейля. Оно оказывается связанным с полем изотропных касательных плоскостей семейства мировых поверхностей нулевых струн. Отметим, что наш вывод основан на предположении, что бивекторное поле нулевой струны удовлетворяет неоднородным уравнениям типа Максвелла и на требовании сохранения связей этими уравнениями. Вывода уравнений бивекторного поля нулевой струны, исходя непосредственно из струнной динамики (ср. [4, 5, 14]), мы не дали.

Максвеллоподобный вид уравнений для  $f_{\mu\nu}$  можно обосновать, следуя Намбу в [14], что дает  $\partial^\mu f_{\mu\nu} = 0$ ,  $\partial^\mu (\epsilon f_{\mu\nu}) = 0$ , так что ток в (3) — поляризационный:  $j_\nu = -\frac{1}{e} \partial^\mu \epsilon f_{\mu\nu}$ . Поскольку первое уравнение возникает как тождество, то поле Рейфлера создается движением семейства двух «дуальных» друг к другу струн. Отметим также, что входящие в поляризационные токи проницаемости являются якобианами вида  $\partial(\sigma, \tau, S, T) / \partial(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , где  $S$  и  $T$  — параметры семейства

ства мировых поверхностей, заполняющих область в пространстве-времени. Поскольку поляризационные токи имеют вид (10), то возникает сложное ограничение на отображение из пространства параметров  $(\sigma, \tau, S, T)$  в пространство-время. Эти геометрические вопросы находятся в стадии исследования.

Автор глубоко благодарен И. Воловичу и Р.-К. Лойде за поддержку и обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Nambu, Y.* // Phys. Lett., 1980, **92B**, № 3—4, 327—330.
2. *Kastrup, H. A., Rinke, M.* // Phys. Lett., 1981, **105B**, № 2—3, 191—196.
3. *Rinke, M.* // Commun. Math. Phys., 1980, **73**, № 2, 265—271.
4. *Hosotani, Y.* // Phys. Rev. Lett., 1981, **47**, № 6, 399—401.
5. *Hosotani, Y.* // Phys. Rev. Lett., 1985, **55**, № 17, 1719—1722.
6. *Kastrup, H. A.* // Phys. Rep., 1983, **101**, № 1—2, 1—167.
7. *Карпан Э.* Теория спиноров. М., 1947.
8. *Whittaker, E. T.* // Proc. Roy. Soc. (London), 1936, **A158**, 38—46.
9. *Желнорович В. А.* Тензорное представление спиноров и спинорных уравнений. М., МГУ, 1979.
10. *Schild, A.* // Phys. Rev., 1977, **D16**, № 6, 1722—1726.
11. *Reifler, F.* // J. Math. Phys., 1984, **25**, № 4, 1088—1092.
12. *Sommers, P.* // J. Math. Phys., 1980, **21**, №10, 2567—2571.
13. *Kastrup, H. A.* // Phys. Lett., 1978, **78B**, № 4, 433—437.
14. *Nambu, Y.* // Phys. Lett., 1981, **102B**, № 2—3, 149—153.
15. *Переломов А. М.* // УФН, 1981, **134**, № 4, 577—609.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию  
6/IV 1988