EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1989, 38, 1

УДК 539.12

И. КАНАТЧИКОВ

О СТРУННОЙ ПРИРОДЕ НЕЙТРИННОГО ПОЛЯ ВЕЙЛЯ

I. KANATTSIKOV. WEYLI NEUTRIINOVÄLJA STRING-OLEMUSEST

I. KANATCHIKOV. ON THE STRINGY NATURE OF THE WEYL NEUTRINO FIELD

(Представил Х. Керес)

В работах по Гамильтон—Якобиевой (Г-Я) формулировке теории струн в четырех измерениях [1–6] была установлена связь между движением релятивистской струны и бивекторным полем $f_{\mu\nu}$, удовлетворяющим связям

$$f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}=\mu^2, \qquad f^{\mu\nu}\overset{*}{f}_{\mu\nu}=0. \tag{1}$$

Наряду с этим в ряде работ [7–9] была отмечена эквивалентность спиноров Вейля и нулевых бивекторов, подчиняющихся связям (1) при $\mu^2=0$. Возникает вопрос, не является ли это указанием на тесную связь между бивекторным полем, образуемым движением струны, и бивекторным полем, соответствующим спинорному полю Вейля.

В этой работе мы получаем уравнения движения бивекторного поля нулевой струны [10]. Они эквивалентны уравнениям Рейфлера [11, 12] для нейтрино Вейля. Последние получаются из волнового уравнения Вейля в результате билинейного отображения Картана [7] из пространства спиноров в пространство изотропных комплексных векторов. Таким образом, уже на классическом уровне нулевая струна приводит к безмассовому фермионному полю (нейтрино Вейля), описываемому в терминах изотропного тензорного (комплексного векторного или бивекторного) поля.

Вернемся к связям (1). Интересующий нас случай $\mu^2=0$ реализуется для бивекторного поля, связанного с движением *нулевой* струны. Действительно, согласно Каструпу [13], это поле на мировой поверхности струны $x_\mu=x_\mu(\nu,\tau)$ пропорционально плюккеровым координатам $v_{\mu\nu}=x'_\mu\dot{x}_\nu-x'_\nu\dot{x}_\mu$ касательных плоскостей в четырехмерном пространстве-времени, т. е.

$$f_{\mu\nu}(x(\sigma,\tau))=\lambda v_{\mu\nu}(\sigma,\tau). \tag{2}$$

Поскольку мировая поверхность нулевой струны в каждой своей точке касательна к проходящему через нее световому конусу, то $v_{\mu\nu}v^{\mu\nu}=0$, что и обеспечивает равенство $\mu^2=0$ в (1).

Для продолжения определенного в (2) поля $f_{\mu\nu}$ с мировой поверхности струны на включающую ее область в пространстве-времени можно или рассмотреть семейство мировых поверхностей струн, заполняющих эту область [4, 5, 14], или воспользоваться обобщенной теорией

Г-Я [2, 3, 6]. Оба подхода, конечно, связаны. Такое продолжение приводит к уравнениям движения связанного со струной бивекторного поля. К сожалению, использовать в случае нулевой струны обобщенную по Каратеодори теорию Г-Я мы не можем, так как для первой лагранжиан Шильда $L_s = \alpha v_{\mu\nu} v^{\mu\nu}$ равен нулю, а при этом формулы второй становятся сингулярными, поскольку содержат множители L^{-1} (см. обзор [6]). Применимость обобщенной по Де Дондеру—Вейлю [6] теории Г-Я, соответствующей подходу Намбу [1], также вызывает сомнения, так как она получается из теории Каратеодори как раз в противоположном к интересующему нас пределе $L^{-1} \to 0$ [6].

Несмотря на это, мы предполагаем, что утверждение в [2, 13, 14] о том, что связанное с движением струны бивекторное поле $f_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла с источником (ср. [4,5])

$$\partial^\mu \tilde{f}_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu f_{\mu\nu} = j_\nu \tag{3}$$

остается в силе и для нулевых струн. Отметим, что в [2, 6] первое из уравнений (3) возникает как условие замкнутости обобщенной 2-формы Г-Я $\mathbf{d}S^1 \wedge \mathbf{d}S^2 \sim f_{\mu\nu}\,\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu$, а второе вводится руками и интерпретируется как *определение* электрического тока, соответствующего конкретной конфигурации поля, образуемой движением струны.

При этом, как показывает рассмотренный в [13] пример, даже простейшему движению струны в виде вращающегося стержня соответствует довольно экзотическое для электродинамики распределение тока, коррелирующее как с движением струны, так и с потоком плотности энергии поля (см. (5)—(10) в [13]). Это, на наш взгляд, указывает на то, что источник в (3) не является внешним, а также тесно связан с движением струны и обусловлен им как само поле $f_{\mu\nu}$. Кроме того, поле $f_{\mu\nu}$ (в отличие от электромагнитного) вследствие связей (1) принимает значения в нелинейном многообразии, а это, как известно, например, из киральных моделей [15], приводит к добавлению к уравнениям свободного (без связей) поля нелинейных членов самодействия или, иначе, эффективных источников, служащих для сохранения связей. Именно эту роль и призван играть источник j_ν в (3), а следовательно, он должен представлять собой некоторую нелинейную комбинацию полей, которую необходимо найти. Замена внешних источников эффективным самодействием, обеспечивающим сохранение связей, делает теорию струнного бивекторного поля внутренне более самосогласованной.

В интересующем нас случае нулевого бивекторного поля связи $f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = \tilde{f}_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = 0$ обладают дуальной инвариантностью и поэтому для их сохранения в (3) должны в общем случае присутствовать как электрические, так и магнитные источники. Вводя компоненты бивектора $f_{\mu\nu}$

$$f_{0i} = \mathrm{E}_i, \quad f_{ij} = \varepsilon_{ijk} \mathrm{H}_k, \tag{4}$$

записываем искомые уравнения в виде

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \varrho_e, \tag{5а}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{H} = \mathbf{g}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = \varrho_m, \tag{5б}$$

где $j_\nu(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ и $g_\nu(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ — эффективные источники, обеспечивающие сохранение связей $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ и являющиеся неизвестными нелинейными комбинациями полей. Для их определения в продифференцированные связи подставим выражения производных от полей

$$\partial_t \mathrm{E}_i = (\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_i - j_i, \quad \partial_t \mathrm{H}_i = g_i - (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_i,$$
$$\partial_i \mathrm{E}_j = \varepsilon_{ijk} g_k - \varepsilon_{ijk} \partial_t \mathrm{H}_k + \partial_j \mathrm{E}_i, \quad \partial_i \mathrm{E}_j = \varepsilon_{ijk} j_k + \varepsilon_{ijk} \partial_t \mathrm{E}_k + \partial_j \mathrm{H}_i, \tag{6}$$

полученные из уравнений (5). Это приводит к следующим соотношениям:

$$\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{j}-\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{E}+\mathbf{E}\cdot\mathbf{g}=0,$$
$$\partial_t(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)=\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}+\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{E}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{g}=0, \tag{7}$$

$$\nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})=\mathbf{H}\times\mathbf{g}+\mathbf{E}\times\mathbf{j}-\mathbf{H}\times\partial_t\mathbf{H}+\mathbf{E}\times\partial_t\mathbf{E}+(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{E}+(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{H}=0,$$
$$\nabla(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)=\mathbf{E}\times\mathbf{g}-\mathbf{H}\times\mathbf{j}-\mathbf{E}\times\partial_t\mathbf{H}-\mathbf{H}\times\partial_t\mathbf{E}+(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}-(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H}=0, \tag{8}$$

являющимися алгебраическими уравнениями для $\mathbf{j}$ и $\mathbf{g}$. Система (7)—(8) переопределена и мы рассмотрим условия ее совместности. Умножая (8) скалярно на единичный вследствие связей вектор $\mathbf{v}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}/\mathbf{E}^2$, получим

$$\mathbf{E}\cdot(\mathbf{g}-\partial_t\mathbf{H}-\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{H}))-\mathbf{H}\cdot(\mathbf{j}+\partial_t\mathbf{E}+\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{E}))=0,$$
$$\mathbf{H}\cdot(\mathbf{g}-\partial_t\mathbf{H}-\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{H}))+\mathbf{E}\cdot(\mathbf{j}+\partial_t\mathbf{E}+\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{E}))=0.$$

Подставляя сюда $\mathbf{j}$ и $\mathbf{g}$ из (5), приходим к уравнениям

$$\mathbf{E}\cdot(\mathrm{rot}\,\mathbf{E}-\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{H}))-\mathbf{H}\cdot(\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{E})+\mathrm{rot}\,\mathbf{H})=0,$$
$$\mathbf{H}\cdot(\mathrm{rot}\,\mathbf{E}-\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{H}))+\mathbf{E}\cdot(\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{E})+\mathrm{rot}\,\mathbf{H})=0, \tag{9}$$

которые совместны с (7) при

$$\mathbf{j}=-\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{E}),\quad \mathbf{g}=\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{H}). \tag{10а}$$

Теперь в качестве нулевых компонент токов естественно взять

$$\varrho_e=\mathbf{v}\cdot(\partial_t\mathbf{E}),\quad \varrho_m=\mathbf{v}\cdot(\partial_t\mathbf{H}). \tag{10б}$$

Отметим, что 4-векторный характер внешне нековариантных выражений для эффективных источников обеспечивается связями $\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2=\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0$.

Запишем уравнения (5), (10) в терминах изотропного вектора $\mathbf{F}=\mathbf{E}+i\mathbf{H}$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}-i\partial_t\mathbf{F}=-i\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{F}),\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{F}=\mathbf{v}\cdot(\partial_t\mathbf{F}). \tag{11а, б}$$

Но это не что иное, как уравнения Рейфлера [11] для нейтринного поля Вейля! При этом уравнение (11б), не приведенное в [11], получается из (11а) скалярным умножением на $\mathbf{v}$.

Итак, бивекторное поле нулевой струны удовлетворяет тем же уравнениям, что и нейтринное поле в векторной теории Рейфлера (связь компонент бивектора и изотропного вектора определена в (4)). Это указывает на струнную природу нейтринного поля Вейля. Оно оказывается связанным с полем изотропных касательных плоскостей семейства мировых поверхностей нулевых струн. Отметим, что наш вывод основан на предположении, что бивекторное поле нулевой струны удовлетворяет неоднородным уравнениям типа Максвелла и на требовании сохранения связей этими уравнениями. Вывода уравнений бивекторного поля нулевой струны, исходя непосредственно из струнной динамики (ср. [4, 5, 14]), мы не дали.

Максвеллоподобный вид уравнений для $f_{\mu\nu}$ можно обосновать, следуя Намбу в [14], что дает $\partial^\mu f_{\mu\nu}=0$, $\partial^\mu(\varepsilon f_{\mu\nu})=0$, так что ток в (3) — поляризационный: $j_\nu=-\dfrac{1}{\varepsilon}\partial^\mu\varepsilon f_{\mu\nu}$. Поскольку первое уравнение возникает как тождество, то поле Рейфлера создается движением семейства двух «дуальных» друг к другу струн. Отметим также, что входящие в поляризационные токи проницаемости являются якобианами вида $\partial(\sigma,\tau,S,T)/\partial(x_1,x_2,x_3,x_0)$, где S и T — параметры семейства мировых поверхностей, заполняющих область в пространстве-времени. Поскольку поляризационные токи имеют вид (10), то возникает сложное ограничение на отображение из пространства параметров (σ, τ, S, T) в пространство-время. Эти геометрические вопросы находятся в стадии исследования.

Автор глубоко благодарен И. Воловичу и Р.-К. Лойде за поддержку и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nambu, Y.* // Phys. Lett., 1980, **92B**, № 3—4, 327—330.
2. *Kastrup, H. A., Rinke, M.* // Phys. Lett., 1981, **105B**, № 2—3, 191—196.
3. *Rinke, M.* // Commun. Math. Phys., 1980, **73**, № 2, 265—271.
4. *Hosotani, Y.* // Phys. Rev. Lett., 1981, **47**, № 6, 399—401.
5. *Hosotani, Y.* // Phys. Rev. Lett., 1985, **55**, № 17, 1719—1722.
6. *Kastrup, H. A.* // Phys. Rep., 1983, **101**, № 1—2, 1—167.
7. *Картан Э.* Теория спиноров. М., 1947.
8. *Whittaker, E. T.* // Proc. Roy. Soc. (London), 1936, **A158**, 38—46.
9. *Желнорович В. А.* Тензорное представление спиноров и спинорных уравнений. М., МГУ, 1979.
10. *Schild, A.* // Phys. Rev., 1977, **D16**, № 6, 1722—1726.
11. *Reifler, F.* // J. Math. Phys., 1984, **25**, № 4, 1088—1092.
12. *Sommers, P.* // J. Math. Phys., 1980, **21**, №10, 2567—2571.
13. *Kastrup, H. A.* // Phys. Lett., 1978, **78B**, № 4, 433—437.
14. *Nambu, Y.* // Phys. Lett., 1981, **102B**, № 2—3, 149—153.
15. *Переломов А. М.* // УФН, 1981, **134**, № 4, 577—609.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
6/IV 1988