EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1988, 37, 1

УДК 513.88

Эве ОЯ, О. РЕЙНОВ

КОНТРПРИМЕР А. ГРОТЕНДИКУ

(Представил Г. Вайникко)

А. Гротендик в предложении 15 своей фундаментальной работы [1] (гл. I, с. 86) утверждает следующее. Пусть X и Y — банаховы пространства такие, что одно из сопряженных пространств X^* или Y^{**} обладает свойством аппроксимации; если сопряженный оператор T^* линейного непрерывного оператора $T:X\to Y$ является ядерным, то T также ядерен. Это утверждение в [1] доказано лишь в предположении свойства аппроксимации пространства X^*. Мы приведем пример, показывающий, что в действительности утверждение А. Гротендика не верно в предположении свойства аппроксимации пространства Y^{**}. С другой стороны, мы докажем, что заключение результата А. Гротендика остается справедливым, если Y^{***} обладает свойством аппроксимации. Это более сильное предположение, ибо Y^{**} обладает свойством аппроксимации, если им обладает Y^{***}.

Нам удобно использовать следующие обозначения. Пространства линейных непрерывных, интегральных (в смысле Гротендика) и ядерных операторов, действующих из пространства X в пространство Y, обозначаются через $L(X,Y)$, $I(X,Y)$ и $N(X,Y)$ соответственно. Символом J_Z обозначается каноническое вложение банахова пространства Z во второе сопряженное пространство Z^{**}. Основные используемые факты о ядерных и интегральных операторах, а также о свойстве аппроксимации можно найти в [2].

В связи с предположением нижеследующей теоремы 1 и замечанием к ней отметим, что первый пример сепарабельного рефлексивного пространства без свойства аппроксимации был построен П. Энфло [3]. Теперь известно много таких примеров (которые подробно рассмотрены в [4], с. 1—47, 717—727, 856).

Теорема 1. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство без свойства аппроксимации такое, что X^* сепарабельно. Тогда существуют банахово пространство Z и оператор $S\in I(Z^{**},Z)$ такие, что Z^{**} имеет ограниченно полный базис, Z^{***} сепарабельно, но не обладает свойством аппроксимации; $S^*\in N(Z^*,Z^{***})$, $J_Z\circ S\in N(Z^{**},Z^{**})$, а $S\notin N(Z^{**},Z)$. При этом S факторизуется через X так, что в этой факторизации $S=\beta\circ A$ оператор β является интегральным.*

Замечание. Если в теореме 1 пространство X еще и рефлексивно, то оператор A является слабо компактным. Из [1] (гл. I, теорема 10 и предложение 15) вытекает следующее утверждение (ср. с утверждением 2 в теореме 10): пусть X, Y, Z — банаховы пространства, причем Y^{**} обладает свойством аппроксимации; если $T\in L(X,Z)$ является слабо компактным и $S\in I(Z,Y)$, то $S\circ T\in N(X,Y)$. Таким образом, теорема 1 представляет собой контрпример этому утверждению.

Для доказательства теоремы 1, а также теоремы 2 нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть Y — банахово пространство. Если Y^{**} обладает свойством аппроксимации и $S \in N(Y^{**}, Y)$, то определены следы* $\operatorname{tr} J_Y \circ S$, $\operatorname{tr} J_{Y^*} \circ S^*$ *и они равны.*

Доказательство. Известно, что если банахово пространство X обладает свойством аппроксимации, то для каждого оператора $T \in N(X, X)$ определен след, который может быть подсчитан по формуле $\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n)$, где $T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes x_n$, $x_n^* \in X^*$, $x_n \in X$, — произвольное ядерное представление оператора T (см. [1], гл. I, § 5; это ясно из того, что в этом случае $N(X, X)$ канонически изометрически изоморфно проективному тензорному произведению $X^* \widehat{\otimes} X$ (см. [2], с. 246)). Поскольку Y^{**} обладает свойством аппроксимации, то по результату А. Гротендика (см. [2], с. 242) этим свойством обладает также Y^*. Поэтому для операторов $J_Y \circ S \in N(Y^{**}, Y^{**})$ и $J_Y^* \circ S^* \in N(Y^*, Y^*)$ определены следы. Пусть $S = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{***} \otimes y_n$, $y_n^{***} \in Y^{***}$, $y_n \in Y$ — ядерное представление оператора S. Тогда

$$\operatorname{tr} J_Y \circ S = \operatorname{tr} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{***} \otimes J_Y y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{***}(J_Y y_n).$$

А поскольку $S^* = \sum_{n=1}^{\infty} J_Y y_n \otimes y_n^{***}$, то

$$\operatorname{tr} J_{Y^*} \circ S^* = \operatorname{tr} \sum_{n=1}^{\infty} J_Y y_n \otimes J_{Y^*} y_n^{***} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (J_Y y_n)(J_{Y^*} y_n^{***}) = \sum_{n=1}^{\infty} (J_{Y^*} y_n^{***})(y_n) = \operatorname{tr} J_Y \circ S.$$

Доказательство теоремы 1. Ввиду сепарабельности X, согласно [5] (см. также [6], с. 26), существует банахово пространство Z и гомоморфизм A пространства Z^{**} на X (о понятии гомоморфизма см., напр., [7]) такие, что Z^{**} имеет ограниченно полный базис и $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} J_Z$. Нетрудно доказать (см. [6], с. 35), что Z^{***} не обладает свойством аппроксимации (кстати, этот факт будет ясен и из нашей теоремы 2) и является сепарабельным (так как X^* сепарабельно).

Поскольку X не обладает свойством аппроксимации, то (см. [2], с. 239—240, или [6], с. 32) существуют $x^n \in X$, $x^*_n \in X^*$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|x_n\| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n = 0$ при всех $x \in X$, а $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 1$. Так как A — гомоморфизм, то существует $m > 0$ такое, что для каждого x_n найдется $z_n^{**} \in Z^{**}$ так, что $x_n = A z_n^{**}$, $\|x_n\| \geqslant m \|z_n^{**}\|$, $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|z_n^{**}\| < \infty$, то существует $\alpha \in N(X, Z^{**})$ с ядерным представлением $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes z_n^{**}$. Заметим, что $\operatorname{Im} \alpha \subset \operatorname{Ker} A$, так как при всех $x \in X$

$$A(\alpha x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) A z_n^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n = 0.$$

Значит, $\operatorname{Im} \alpha \subset \operatorname{Im} J_Z$, и мы можем определить $\beta \in L(X, Z)$ так, что $J_Z \circ \beta = \alpha$. Так как $J_Z \circ \beta = \alpha \in N(X, Z^{**})$, то $J_Z \circ \beta \in I(X, Z^{**})$. Следовательно (см. [2], с. 233), $\beta \in I(X, Z)$.

Положим $S = \beta \circ A$. Тогда $S \in I(Z^{**}, Z)$ и $J_Z \circ S = J_Z \circ \beta \circ A = \alpha \circ A \in N(Z^{**}, Z^{**})$. Далее, поскольку $(J_Z \circ S)^* \in N(Z^{***}, Z^{***})$, то $S^* = S^* \circ J_Z^* \circ J_{Z^*} = (J_Z \circ S)^* \circ J_{Z^*} \in N(Z^*, Z^{***})$.

Остается доказать, что $S \notin N(Z^{**}, Z)$. В силу условия $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} J_Z$ имеем $J_{Z^*} \circ S^* = J_{Z^*} \circ S^* \circ J_Z^* \circ J_{Z^*} = (J_Z \circ S \circ J_Z)^* \circ J_{Z^*} = (\alpha \circ A \circ J_Z)^* \circ J_{Z^*} = (\alpha \circ 0)^* \circ J_{Z^*} = 0$. Допустим, что $S \in N(Z^{**}, Z)$. Тогда в силу леммы $\operatorname{tr} J_Z \circ S = \operatorname{tr} J_{Z^*} \circ S^*$, что невозможно, поскольку

$$\operatorname{tr} J_Z \circ S = \operatorname{tr} \alpha \circ A = \sum_{n=1}^{\infty} (A^* x_n^*)(z_n^{**}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(A z_n^{**}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 1$$

(так как $\sum_{n=1}^{\infty} A^* x_n^* \otimes z_n^{**}$ — ядерное представление оператора $\alpha \circ A$), а

$$\operatorname{tr} J_Z{}^* \circ S^* = \operatorname{tr} 0 = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть X и Y — банаховы пространства, Y^{***} обладает свойством аппроксимации и $T \in L(X, Y)$. Если $J_Y \circ T \in N(X, Y^{**})$ или $T^* \in N(Y^*, X^*)$, то $T \in N(X, Y)$.*

Доказательство. Так как в случае $T^* \in N(Y^*, X^*)$ имеем $T^{**} \in N(X^{**}, Y^{**})$ и, следовательно, $J_Y \circ T = T^{**} \circ J_X \in N(X, Y^{**})$, то достаточно доказать импликацию

$$J_Y \circ T \in N(X, Y^{**}) \Rightarrow T \in N(X, Y).$$

Пусть $u = \sum x_n^* \otimes y_n^{**} \in X^* \widehat{\otimes} Y^{**}$ определяет ядерный оператор $J_Y \circ T$. Достаточно показать, что, в действительности, $u \in X^* \widehat{\otimes} \operatorname{Im} J_Y$, так как тогда $T \in N(X, Y)$. Для этого, поскольку $X^* \widehat{\otimes} \operatorname{Im} J_Y$ является замкнутым подпространством в $X^* \widehat{\otimes} Y^{**}$ (см. [2], с. 238), достаточно доказать, что $\langle A, u \rangle = 0$ при всех $A \in L(Y^{**}, X^{**}) = (X^* \widehat{\otimes} Y^{**})^*$ (см. [2], с. 230) таких, что $\langle A, v \rangle = 0$, $v \in X^* \widehat{\otimes} \operatorname{Im} J_Y$.

Пусть $A \in L(Y^{**}, X^{**})$ удовлетворяет условию $\langle A, v \rangle = 0$, $v \in X^* \widehat{\otimes} \operatorname{Im} J_Y$. Тогда, в частности, $(A \circ J_Y y)(x^*) = 0$ при всех $x^* \in X^*$ и $y \in Y$; значит, $A \circ J_Y = 0$. Так как $T^{**} \circ A = (J_Y{}^* \circ J_{Y^*})^* \circ T^{**} \circ A = J_{Y^*}{}^* \circ (J_Y \circ T)^{**} \circ A$, а $(J_Y \circ T)^{**}$ ядерно, то $T^{**} \circ A \in N(Y^{**}, Y^{**})$, причем $\sum (A^* \circ J_{X^*} x_n^*) \otimes y_n^{**}$ есть ядерное представление оператора $T^{**} \circ A$.

Поскольку оператор $T^{**} \circ A$ ядерен, то он компактен. Следовательно, $\operatorname{Im} T^{**} \circ A \subset \operatorname{Im} J_Y$, и мы можем определить $S \in L(Y^{**}, Y)$ так, что $J_Y \circ S = T^{**} \circ A$. Покажем, что $S \in N(Y^{**}, Y)$. Согласно результату А. Гротендика (см. [2], с. 243), для этого достаточно проверить, что $S^* \in N(Y^*, Y^{***})$, так как Y^{***} обладает свойством аппроксимации. А ядерность S^* очевидна, поскольку $S^* = S^* \circ J_Y{}^* \circ J_{Y^*} = (J_Y \circ S)^* \circ J_{Y^*}$ и $(J_Y \circ S)^* = (T^{**} \circ A)^* \in N(Y^{***}, Y^{***})$. Далее заметим, что $J_Y{}^* \circ S^* = 0$. Действительно, из равенства $J_Y \circ S \circ J_Y = T^{**} \circ A \circ J_Y = T^{**} \circ 0 = 0$ следует, что $J_Y{}^* \circ S^* = (J_Y \circ S \circ J_Y)^* \circ J_{Y^*} = 0$. Так как Y^{***} обладает свойством аппроксимации, то и Y^{**} обладает этим свойством, и мы можем применять лемму к оператору S. Итак, мы получаем, что $\operatorname{tr} J_Y \circ S = \operatorname{tr} J_Y{}^* \circ S^* = \operatorname{tr} 0 = 0$. Поэтому и $\operatorname{tr} T^{**} \circ A = 0$. С другой стороны, $\operatorname{tr} T^{**} \circ A = \sum (A^* \circ J_{X^*} x_n^*)(y_n^{**}) = \sum (J_{X^*} x_n^*)(A y_n^{**}) = \sum (A y_n^{**})(x_n^*) = \langle A, u \rangle$, так что $\langle A, u \rangle = 0$.

Теорема доказана.

При помощи теоремы 2 доказываются аналоги многих известных результатов об операторах, действующих из X в Y, где предположение, что X^* обладает свойством аппроксимации, заменено предположением, что этим свойством обладает Y^{***}. Так, например, по схеме доказательства теоремы 6 из [2] (с. 248) доказывается

Следствие 1. *Пусть X и Y — банаховы пространства такие, что X^* обладает свойством Радона—Никодима, а Y^{***} — свойством аппроксимации. Тогда $I(X, Y) = N(X, Y)$.*

В связи со следствием 1 отметим, что X^* обладает свойством Радона—Никодима, в частности, если X^* сепарабельно или рефлексивно.

(По поводу эквивалентных определений свойства Радона—Никодима см. [2].)

По схеме доказательства теоремы 12 из [2] (с. 252) доказывается

Следствие 2. *Пусть X, Y и Z — банаховы пространства, причем Y^{***} обладает свойством аппроксимации. Если $T \in L(X, Z)$ является слабо компактным и $S \in I(Z, Y)$, то $S \circ T \in N(X, Y)$.*

В заключение отметим, что в силу теоремы 1 и замечания к ней предположение о свойстве аппроксимации пространства Y^{***} в теореме 2 и ее следствиях 1 и 2 существенно и не может быть заменено более слабым условием, что Y^{**} обладает свойством аппроксимации. Что касается аналогов теоремы 2 и следствий 1 и 2, где вместо предположения о свойстве аппроксимации пространства Y^{***} требуется, что свойством аппроксимации обладает X^*, то (как показывают теорема 1 и замечание к ней) последнее не может быть заменено условием, что свойством аппроксимации обладает X (для утверждения, что из ядерности сопряженного оператора следует ядерность исходного оператора, этот факт был установлен Т. Фигелем и У. Б. Джонсоном [8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grothendieck, A.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc., **16**, 1955.
2. *Diestel, J., Uhl, J. J., Jr.* Vector measures. Math. Surveys, № 15, Amer. Math. Soc., Providence—Rhode Island, 1977.
3. *Enflo, P.* Acta Math., **130**, № 3—4, 309—317 (1973).
4. *Singer, I.* Bases in Banach Spaces, II. Berlin—Heidelberg—New York, Springer Verlag, 1981.
5. *Lindenstrauss, J.* Isr. J. Math., **9**, № 3, 279—284 (1971).
6. *Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.* Classical Banach Spaces, I. Sequence Spaces. Berlin—Heidelberg—New York, Springer Verlag, 1977.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., «Наука». 1984.
8. *Figiel, T., Johnson, W. B.* Proc. Amer. Math. Soc., **41**, № 1, 197—200 (1973).

Тартуский государственный университет

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 16/III 1987

Eve OJA, O. REINOV

KONTRANÄIDE A. GROTHENDIECKILE

Olgu T selline pidev lineaarne operaator Banachi ruumist X Banachi ruumi Y, et T^* on tuumaoperaator. A. Grothendieck [1] väidab, et T on tuumaoperaator, kui teisel kaasruumil Y^{**} on aproksimatsiooniomadus. On toodud näide (teoreem 1), mis selle väite ümber lükkab, ning tõestatud A. Grothendiecki väite õigsus eeldusel, et aproksimatsiooniomadus on kolmandal kaasruumil Y^{***} (teoreem 2).

Eve OJA, O. REINOV

A COUNTEREXAMPLE TO A. GROTHENDIECK

Let X and Y be Banach spaces. Let $T: X \to Y$ be a continuous linear operator such that $T^*: Y^* \to X^*$ is nuclear. A. Grothendieck [1], part I, p. 86, has stated that T is nuclear if Y^{**} has the approximation property. This statement is disproved by

Theorem 1. *Let X be a separable Banach space without the approximation property such that X^* is separable. Then there exist a Banach space Z and an integral operator $S: Z^{**} \to Z$ such that Z^{**} has a boundedly complete basis, Z^{***} is separable but has no approximation property; $S^*: Z^* \to Z^{***}$ is nuclear, S is nuclear into Z^{**} but is not nuclear itself. Furthermore, S factors through X and in this factorization $S = \beta \circ A$, the operator β is integral.*

On the other hand, in Theorem 2, it is shown that T is nuclear if Y^{***} has the approximation property.