EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1988, 37, 1

УДК 539.12 https://doi.org/10.3176/phys.math.1988.1.01

Р.-К. ЛОЙДЕ

К ТЕОРИИ БЕЗМАССОВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

(Представил Х. Керес)

Рассмотрены безмассовые волновые уравнения в формализме ковариантных проекционных операторов спина. Приведены необходимые и достаточные условия калибровочной инвариантности уравнения и ограничения на внешний источник.

1. Введение

Важную роль в современной теории элементарных частиц играют векторные калибровочные поля. Суперсимметрия и супергравитация требуют существования калибровочных полей с более высокими спиральностями [1]. Поля гравитона и гравитино со спиральностями 2 и 3/2 входят в один безмассовый супермультиплет. Суперсимметрия допускает для гравитона партнера со спиральностью 5/2, но пока еще соответствующая теория — гипергравитация — связана с трудностями. Что касается математического исследования калибровочных полей с высокими спиральностями, то здесь еще полная теория отсутствует. В работах [2, 3], где были рассмотрены некоторые уравнения для высших спинов, авторы пришли к выводу, что принципы построения массивных уравнений не применимы в случае безмассовых калибровочно-инвариантных уравнений. В данной работе мы покажем, что это не так, и выведем общие условия на матрицы уравнения в безмассовом случае.

Для полей со спиральностями 3/2 и 5/2 нами было показано, что принципы построения массивных уравнений применимы и в безмассовом случае [4, 5]. При этом условия, налагаемые на матрицы уравнения, существенно отличаются от условий в массивном случае. В безмассовом случае определенные миноры спин-блоков должны равняться нулю. Последнее условие слабее, чем требование нильпотентности спин-блоков в массивном случае. Соответственно для описания безмассовых полей размерность представления может быть меньше. Для описания спина 5/2 с массой m требуется, например, симметричное тензор-биспинорное поле $\psi_\alpha^{\mu\nu}$ и биспинорное поле λ_α, а для описания соответствующей спиральности в безмассовом случае достаточно поля $\psi_\alpha^{\mu\nu}$.

Мы исходим из допущения, что калибровочно-инвариантные уравнения получаются из соответствующих массивных уравнений. Приведены необходимые и достаточные условия для калибровочной инвариантности уравнений при $m=0$ и ограничения на внешний источник. Мы применяем формализм ковариантных проекционных операторов, развитый в [6, 7].

2. Массивные уравнения

Приведем некоторые необходимые понятия из теории массивных релятивистски-инвариантных волновых уравнений в формализме проекционных операторов спина [6, 7].

Рассмотрим уравнение порядка n

$$\pi\Psi=m^n\Psi. \tag{1}$$

Допустим, что Ψ разложено в прямую сумму r неприводимых полей ψ_i, которые преобразуются по представлениям (k_i, l_i) группы Лоренца. Тогда оператор π представляется в блочном виде

$$\pi=(-\Box)^{n/2}|a_{ij}P_{ij}|, \tag{2}$$

где a_{ij} произвольные постоянные, конкретный выбор которых определяет свойства уравнения. Операторы P_{ij} являются линейными комбинациями ковариантных операторов проектирования спина P^s_{ij}

$$P_{ij}=\sum_s \beta_{ij}(s)P^s_{ij}. \tag{3}$$

Общие выражения для вычисления коэффициентов $\beta_{ij}(s)$ при произвольном s приведены в [8]. В случае уравнений первого порядка коэффициенты $\beta_{ij}(s)$ хорошо известны (см., напр., [6]).

Свойства уравнения определяются приведенными матрицами β_s спина s

$$\beta_s=|a_{ij}\beta_{ij}(s)|. \tag{4}$$

Матрицы β_s являются квадратичными $r\times r$-матрицами. Ненулевые собственные значения λ_s определяют массы состояний, соответствующих спину $s: m_s=m\lambda_s^{-1/n}$. В случае, когда спин s данным уравнением не описывается, марица β_s должна быть нильпотентной, т. е. $(\beta_s)^a=0$, где $a>1$.

Так как не все поля ψ_i в разложении Ψ содержат спин s, в дальнейшем нам удобнее работать со спин-блоками $\tilde{\beta}_s$, которые получаются из β_s исключением тех рядов и столбцов, которые соответствуют представлениям, несодержащим спин s (элементы этих рядов и столбцов равны нулю). Матрицы $\tilde{\beta}_s$, соответствуют спин-блокам Гельфанда—Яглома. Допустим, что первые $r_s\leqslant r$ представлений содержат спин s. Тогда

$$\tilde{\beta}_s=|a_{ij}\beta_{ij}(s)|, \quad i,j=1, 2, \ldots, r_s \tag{5}$$

является квадратичной $r_s\times r_s$-матрицей.

3. Безмассовые уравнения

Рассмотрим вместо (1) безмассовое уравнение порядка n

$$\pi\Psi=0. \tag{6}$$

Выведем необходимые и достаточные условия для калибровочной инвариантности уравнения (6) относительно калибровочного преобразования

$$\Psi\to\Psi+Q^g\varepsilon \tag{7}$$

и существования оператора Q^z со свойством

$$Q^z\pi=0. \tag{8}$$

В случае уравнения с источником $\pi\Psi=J$ оператор Q^z дает ограничение на источник $Q^zJ=0$. Последнее условие означает, что допустимы только такие взаимодействия, которые дают источники, удовлетворяющие $Q^zJ=0$.

Допустим, что операторы Q^g и Q^z являются дифференциальными операторами первого порядка, как это общепринято. В принципе, можно рассматривать и калибровочные преобразования с производными более высокого порядка. Но поскольку калибровочная свобода необходима для элиминирования ненужных спиральностей, то фиксирование калибровки привело бы к уравнениям выше второго порядка. Такие возможности еще до конца не исследованы, хотя и в [9] допускается применение уравнений выше второго порядка.

Рассмотрим сперва инвариантность уравнения (6) относительно калибровочного преобразования (7). Разложим поле ε в прямую сумму неприводимых полей ε_k. Тогда для калибровочной инвариантности уравнения надо рассматривать инвариантность отдельно для каждого поля ε_k. При этом в калибровочное преобразование входят только такие поля ε_k, которые зацепляются с представлениями i в разложении Ψ, т. е. $(k_k, l_k)\otimes(^1/_2, {}^1/_2)$ содержит неприводимые представления, входящие в разложение $\Psi=\psi_1\oplus\ldots\oplus\psi_r$. Перепишем (7) для поля ε_k в виде

$$\psi_i \to \psi_i + Q^g_{ik}\varepsilon_k, \quad i=1, 2, \ldots, r. \tag{9}$$

Так как Q^g является дифференциальным оператором первого порядка, то оно выражается через проекционные операторы $P_{ik}{}^s$ в следующем общем виде

$$Q^g_{ik} = a_i \sum_s \alpha_{ik}(s) \left(\sqrt{\Box}\, P^s_{ik}\right), \tag{10}$$

где a_i — коэффициенты, подлежащие определению, а $\alpha_{ik}(s)$ однозначно определены (см. формулу (2.8) в [6]).

Допустим, что представление k зацепляется с r_g представлениями i. Без потери общности можно считать, что этими являются представления $i=1, 2, \ldots, r_g$. Следовательно, в (9) $Q_{ik}{}^g\neq 0$, если $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, r_g$ и $Q_{ik}{}^g=0$, если $i=r_g+1, \ldots, r_s$. Используя свойство проекционных операторов — $P^s_{ij}P^{s'}_{jk}=\delta_{ss'}P^s_{ik}$, можно показать, что условие калибровочной инвариантности $\pi Q^g=0$ приводится для каждого спина s в разложении (10) к следующему алгебраическому уравнению

$$\begin{vmatrix} a_{11}\beta_{11}(s) & \ldots & a_{1r_g}\beta_{1r_g}(s) & \ldots & a_{1r_s}\beta_{1r_s}(s) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r_g1}\beta_{r_g1}(s) & \ldots & a_{r_gr_g}\beta_{r_gr_g}(s) & \ldots & a_{r_gr_s}\beta_{r_gr_s}(s) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r_s1}\beta_{r_s1}(s) & \ldots & a_{r_sr_g}\beta_{r_sr_g}(s) & \ldots & a_{r_sr_s}\beta_{r_sr_s}(s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1\alpha_{1k}(s) \\ \vdots \\ a_{r_g}\alpha_{r_gk}(s) \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Мы получили систему линейных однородных уравнений относительно $a_i\alpha_{ik}(s)$, которые определяют $a_i (i=1, 2, \ldots, r_g)$. Данная система имеет нетривиальные решения для a_i тогда и только тогда, когда все $r_g\times r_g$ миноры M матрицы $\tilde{\beta}_s$, образованные из первых r_g столбцов, равняются нулю. В частном случае $r_g=r_s$ получим просто $\det\tilde{\beta}_s=0$. Данное условие налагает ограничения на коэффициенты уравнения $a_{ij}(i=1, \ldots, r_s; j=1, \ldots, r_g)$. Условие равенства нулю всех миноров M, образованных из r_g столбцов, связанных с данным калибровочным преобразованием, является только необходимым условием калибровочной инвариантности уравнения (6). Так как a_{ij} и a_i от спина s не зависят, то надо еще требовать согласованности найденных a_{ij} и a_i для всех спинов s в калибровочном преобразовании (9), и всех полей ε_k. Следовательно, для калибровочной инвариантности уравнения (6) относительно поля ε_k необходимо и достаточно, чтобы все миноры матриц $\tilde{\beta}_s$, образованные из столбцов, связанных с калибровочным преобразованием, равнялись нулю, и найденные при этом a_{ij} и a_i образовали согласованную систему.

Из вышеприведенного видно, что условия для определения блоков Гельфанда—Яглома в случае безмассовых уравнений отличаются от соответствующих условий в случае массивных уравнений, хотя уравнение (6) получается из уравнения (1) подставкой $m=0$.

Теперь рассмотрим существование оператора Q^z со свойством $Q^z\pi=0$, который дает ограничение на источник поля. Если уравнение инвариантно относительно калибровочного преобразования, то это означает, что выбором калибровки можно некоторые спины из уравнения элиминировать. Соответствующее ограничение должно быть наложено и на источник поля. Когда уравнение инвариантно относительно калибровочного преобразования с представлением ε_k, данного операторами $P_{ik}{}^s$, то необходимо требовать существования оператора

$$Q^z=|Q^z_{ki}|, \quad i=1, 2, \ldots, r, \tag{12}$$

где $Q_{ki}{}^z$ — линейные дифференциальные операторы вида

$$Q^z_{ki}=b_i\sum_s \alpha_{ki}(s)\,(\sqrt{\Box}\,P^s_{ki}) \tag{13}$$

и b_i — коэффициенты, подлежащие определению. Требуя $Q^z\pi=0$, мы аналогично (11) получим следующее алгебраическое уравнение

$$|b_1\alpha_{k1}(s)\ \ldots\ b_{r_g}\alpha_{kr_g}(s)\ \ldots\ 0|\tilde{\beta}_s=0. \tag{14}$$

Полученная система относительно $b_i\alpha_{ki}(s)$ $(i=1, 2, \ldots, r_g)$ имеет нетривиальные решения при условии, что все $r_g \times r_g$ миноры M матрицы $\tilde{\beta}_s$, образованные из первых r_g рядов, равняются нулю. В частном случае $r_g=r_s$ мы опять получим $\det\tilde{\beta}_s=0$. Следовательно, для существования оператора Q^z необходимо и достаточно, чтобы все миноры матриц $\tilde{\beta}_s$, образованные из рядов, связанных с данным преобразованием, равнялись нулю, и найденные при этом a_{ij} и b_i образовали согласованную систему.

В случае безмассовых полей можно ограничиться уравнениями, где спин-блоки $\tilde{\beta}_s$ являются симметричными матрицами. Тогда из существования оператора Q^g сразу следует существование оператора Q^z, и наоборот.

4. Выводы

Итак, приведены необходимые и достаточные условия для калибровочной инвариантности безмассовых полей и существования ограничений на источник. Калибровочная инвариантность означает существование оператора Q^g со свойством $\pi Q^g=0$, ограничение на источник связано с оператором Q^z со свойством $Q^z\pi=0$. Мы рассмотрели только уравнения. Что касается лагранжианов, то они выводятся, как и в массивном случае, из уравнения, выбрав соответствующую инвариантную билинейную форму.

Безмассовые уравнения для спиральности 3/2 были исследованы в [4]. Оказалось, что для вектор-биспинорного поля существует целый класс безмассовых уравнений, которые отличаются тем, что соответствующие массивные уравнения отличаются спектром масс. Калибровочная инвариантность и ограничения на источник следуют из условий $\det \tilde{\beta}_{1/2}=0$. Безмассовые уравнения для спиральности 2 следуют из массивных уравнений для симметричного тензорного поля, рассмотренных в [7], при условии $\det \tilde{\beta}_0=0$.

Более интересным является случай спиральности 5/2. Для описания безмассового поля достаточно симметричного тензор-биспинора. Калибровочное преобразование при этом дается с помощью вектор-биспинора. Оказывается, что калибровочное преобразование связано только с представлением $(1, 1/2)\oplus(1/2, 1)$ из вектор-биспинора, где компоненты, соответствующие биспинору, отсутствуют [5]. Необходимым и достаточным условием калибровочной инвариантности является $\det \tilde{\beta}_{3/2}=\det \tilde{\beta}_{1/2}=0$. Когда для спиральности 5/2 применяются симметричное тензор-биспинорное поле и биспинорное поле, то требуются общие условия на миноры матриц $\tilde{\beta}_{3/2}$ и $\tilde{\beta}_{1/2}$. Одно такое уравнение рассмотрено в [5]. В [10] описана спиральность 5/2 с помощью специального несимметричного тензор-биспинорного поля, которое называется тетрадоподобным полем. Общий алгебраический анализ показывает, что уравнения для тетрадоподобного поля эквивалентны уравнениям для симметричного тензор-биспинорного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van Nienwenhuizen, P.* Phys. Rep., **68**, № 4, 189—398 (1981).
2. *Berends, F. A., van Holten, J. W., van Nienwenhuizen, P., de Wit, P.* Nucl. Phys., **B154**, № 2, 261—282 (1979).
3. *Berends, F. A., van Reisen, J. C. J. M.* Nucl. Phys., **B164**, № 2, 286—302 (1980).
4. *Loide, R.-K., Polt, A.* ENSV TA Toim. Füüs. Matem., **35**, № 1, 43—55 (1986).
5. *Loide, R.-K.* J. Phys. A: Math. Gen., **19**, № 5, 811—820 (1986).
6. *Loide, R.-K.* J. Phys. A: Math. Gen., **17**, № 12, 2535—2550 (1984).
7. *Loide, R.-K.* J. Phys. A: Math. Gen., **18**, № 14, 2833—2847 (1985).
8. *Loide, R.-K.* Preprint FAI-10. Tartu, 1972.
9. *Deser, S., Townsend, P. K., Siegel, W.* Nucl. Phys., **B184**, № 2, 333—350 (1981).
10. *Aragone, C., Deser, S.* Nucl. Phys., **B170**, № 2, 329—352 (1980).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
18/XII 1987

R.-K. LOIDE

NULLMASSIGA KALIBRATSIOONVÄLJADE TEOORIAST

Artiklis on käsitletud massita lainevõrrandeid kovariantsete spinniprojektsioonioperaatorite formalismis ning antud tarvilikud ja piisavad tingimused võrrandi kalibratsiooninvariantsuseks ja allikatingimused välisele allikale.

R.-K. LOIDE

TO THE THEORY OF MASSLESS GAUGE FIELDS

In the given paper the massless wave equations in the formalism of covariant spin-projection operators are treated. Necessary and sufficient conditions for a gauge invariance of a given equation and the source constraints to an external source are presented.