EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1987, 36, 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1987.1.11

УДК 517.5

*А. КИВИНУКК*

# ДОБАВЛЕНИЕ К ОЦЕНКЕ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА

*A. KIVINUKK.* LISANDUS LEBESGUE'I KONSTANTIDE HINNANGULE

*A. KIVINUKK.* A CONTRIBUTION TO THE ESTIMATION OF LEBESGUE CONSTANTS

*(Представил А. Хумал)*

В настоящем сообщении доказываются дискретные аналоги соответствующих теорем из [1], где приведены также постановка задачи и вводные замечания.

Итак, рассмотрим тригонометрические полиномы

$$K_n(x)=\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos kx\quad(\lambda_k=\lambda_k(n),\ \lambda_k=0\ \text{при}\ k\geqslant n+1)$$

и их нормы

$$\|K_n\|_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|\,dx.$$

Введем обозначения

$$\Delta\lambda_k=\lambda_k-\lambda_{k-1};\quad \Delta^2\lambda_k=\lambda_{k+1}-2\lambda_k+\lambda_{k-1}.$$

Нам потребуется следующая по существу известная ([2] с. 143, [3]).

Л е м м а. *Справедлива формула*

$$\|K_n\|_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}|L_n(x)|\,\frac{dx}{x^2},\tag{1}$$

*где*

$$L_n(x)=4\sin^2(x/2)\,K_n(x)\tag{2}$$

$$=\lambda_0-\lambda_1-\sum_{k=1}^{n+1}\Delta^2\lambda_k\cos kx\tag{3}$$

$$=-2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\Delta\lambda_k\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x.\tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По (2) имеем

$$\|K_n\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{|L_n(x)|}{\sin^2(x/2)}\,dx.$$

Формулу (1) получаем, если функцию $x \mapsto 1/\sin^2(x/2)$ разлагать по полюсам и учитывать, что $L_n$ — функция $2\pi$-периодическая и четная. Выражение (2) перепишем в виде

$$L_n(x)=(1-\cos x)\left(\lambda_0+2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos kx\right),$$

откуда следует (3). Отсюда в свою очередь по преобразованию Абеля вытекает (4).

Следующие теоремы являются дискретными аналогами теорем 1 и 4 из [1].

Теорема 1. *Пусть*

$$\alpha_n=\sum_{k=1}^{n+1}|\Delta\lambda_k|,\qquad \beta_n=|\lambda_0-\lambda_1|+\sum_{k=1}^{n+1}|\Delta^2\lambda_k|.$$

*Тогда*

$$\|K_n\|_1\leqslant\frac{|\lambda_0|}{2n}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k|}{k}\sin\frac{k\pi}{2n}+$$

$$+\frac{2\alpha_n}{\pi}\times\begin{cases}2n\beta_n/(\pi\alpha_n) & \text{при}\quad \beta_n/\alpha_n\leqslant\pi/(2n),\\ 1+\ln(2n\beta_n/(\pi\alpha_n)) & \text{при}\quad \beta_n/\alpha_n\geqslant\pi/(2n).\end{cases}$$

Доказательство. Из леммы получаем неравенства

$$|L_n(x)|\leqslant\left(\frac{|\lambda_0|}{2}+\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\cos kx\right)x^2\quad\text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2n},$$

$$|L_n(x)|\leqslant\alpha_n x,\qquad |L_n(x)|\leqslant\beta_n\qquad\text{при}\quad x\geqslant 0.$$

Поэтому имеем

$$\int_0^\infty|L_n(x)|\frac{dx}{x^2}=\left(\int_0^{\pi/(2n)}+\int_{\pi/(2n)}^{a}+\int_a^\infty\right)|L_n(x)|\frac{dx}{x^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi|\lambda_0|}{4n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k|}{k}\sin\frac{k\pi}{2n}+\alpha_n\ln\frac{2na}{\pi}+\frac{\beta_n}{a}.$$

Теперь положим $a=\beta_n/\alpha_n$, если $\beta_n/\alpha_n\geqslant\pi/(2n)$ и $a=\pi/(2n)$, если $\beta_n/\alpha_n\leqslant\pi/(2n)$, что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Если* $\Delta\lambda_k\leqslant 0$ *при* $k=1,\ldots,n+1$ (*автоматически получаем, что* $\lambda_k\geqslant 0$ *при* $k=0,\ldots,n$, *поскольку из* $\Delta\lambda_{n+1}=-\lambda_n$ *следует* $0\leqslant\lambda_n\leqslant\ldots\leqslant\lambda_0$), *то*

$$\|K_n\|_1\leqslant\frac{2\lambda_0}{2n+1}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{k}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}+$$

$$+\frac{2\lambda_0}{\pi}\times\begin{cases}\beta_n(2n+1)/(2\pi\lambda_0) & \textit{при}\quad \beta_n\leqslant 2\pi\lambda_0/(2n+1);\\ 1+\ln[\beta_n(2n+1)/(2\pi\lambda_0)] & \textit{при}\quad \beta_n\geqslant 2\pi\lambda_0/(2n+1).\end{cases}$$

Доказательство. В этом случае $\alpha_n=\lambda_0$ и $|L_n(x)|\leqslant x^2K_n(x)$ при $0\leqslant x\leqslant 2\pi/(2n+1)$. Дальнейшие рассуждения как и в доказательстве теоремы.

Следствие 2. *Если* $\Delta\lambda_k\leqslant 0$ *при* $k=1,\ldots,n+1$ *и* $\Delta^2\lambda_k\leqslant 0$ *при* $k=1,\ldots,n$, *то в следствии* 1 $\beta_n=2\lambda_n$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\beta_n/\alpha_n \geqslant 4/N$, *где число* $N \geqslant n+1/2$. *Тогда*

$$\|K_n\|_1 \leqslant \frac{4\alpha_n}{\pi^2}\left\{\ln\frac{N\beta_n}{2\alpha_n}+\frac{\pi}{2}c_0+1\right\},$$

где

$$c_0 = \mathrm{Si}\,(\pi)+\ln\,(3/2)+2/\pi \approx 2{,}894.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме имеем

$$\frac{\pi}{2}\|K_n\|_1 = \left(\int_0^a+\int_a^\infty\right)|L_n(x)|\frac{dx}{x^2} \qquad (a>0).$$

Учитывая (4), получим

$$\int_0^a |L_n(x)|\frac{dx}{x^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1}|\Delta\lambda_k|\int_0^a\left|\sin\frac{2k-1}{2}x\right|\frac{dx}{x} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}|\Delta\lambda_k|\int_0^{a(k-1/2)}|\sin x|\frac{dx}{x} \leqslant \alpha_n\int_0^{Na}\frac{|\sin x|}{x}dx.$$

Пусть $Na \geqslant 2\pi$. Тогда для последнего интеграла известна [1] оценка

$$\int_0^{Na}|\sin x|\frac{dx}{x} \leqslant \frac{2}{\pi}\ln\frac{Na}{\pi}+c_0.$$

Поэтому

$$\frac{\pi}{2}\|K_n\|_1 \leqslant \frac{2\alpha_n}{\pi}\ln\frac{Na}{\pi}+\alpha_n c_0+\frac{\beta_n}{a}.$$

Так как $Na \geqslant 2\pi$, то по условию теоремы можно положить $a=\pi\beta_n/(2\alpha_n)$. Теорема доказана.

Простейший пример $\lambda_k(n)\equiv 1$ $(k=0,\ldots,n)$ и $\lambda_k(n)\equiv 0$ $(k\geqslant n+1)$ показывает, что теорема 1 точна по порядку, а теорема 2 точна асимптотически, причем при малых $n$ теорема 1 точнее теоремы 2. Численные оценки также хорошие — в нашем случае из теоремы 2 для операторной нормы частных сумм Фурье следует (ср. [4] с. 183)

$$\|S_n\| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)+2{,}248 \quad (n\geqslant 2).$$

Для менее тривиального случая

$$\lambda_k(n;m,r) = \begin{cases} 1, & 0\leqslant k\leqslant n-m,\\ 1-\left(\dfrac{k+m-n}{m+1}\right)^r, & n-m\leqslant k\leqslant n, \end{cases}$$

который обобщает классические средние Валле Пуссена [5–8], имеем по теореме 2:

$$\|\sigma^r_{n,m}\| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{r(n+1)}{m+1}+2{,}529.$$

Последнюю оценку (без определенного численного остатка) также можно получить из результатов других авторов [9, 10]. По-видимому, новой является оценка нормы средних Ахиезера—Крейна—Фавара (см. определение в [1])

$$\|X^r_n\| \leqslant \frac{4}{\pi^2} \ln \left\{ r(n+1) \tan \frac{\pi}{2(n+1)} + o_r(n) \right\} + O(1).$$

Такого типа оценки норм кратных тригонометрических полиномов предполагается рассматривать в дальнейшем.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Кивинукк А.* Изв. ЭССР. Физ. Матем., 34, № 4, 360—367 (1985).
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.
3. *Степанец А. И.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 50, № 1, 101—136 (1986).
4. *Жук В. В., Натансон Г. И.* Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. Л., ЛГУ, 1983.
5. *de La Vallée Poussin, C.* Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris, Gauthier-Villars, 1919.
6. *Никольский С. М.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 4, № 6, 509—520 (1940).
7. *Стечкин С. Б.* Докл. АН СССР, 80, № 4, 545—548 (1951).
8. *Угулава Д. К.* Тр. Вычисл. центра АН Груз. ССР, 17, № 1, 159—172 (1977).
9. *Стечкин С. Б.* Докл. АН СССР, 75, № 2, 165—168 (1950).
10. *Теляковский С. А.* Тр. Матем. ин-та АН СССР, 62, 61—97 (1961).


*Таллинский политехнический институт*

Поступила в редакцию 14/V 1986